Karolina Kołodziej
Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie

Urszula Mazur
Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie

Umiejętności matematyczne gimnazjalistów obserwowane podczas rozwiązywania zadań egzaminacyjnych z kontekstem praktycznym

Wstęp

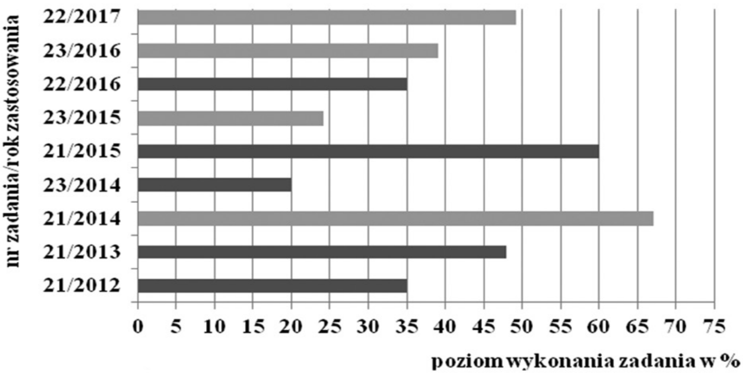
W życiu codziennym często jesteśmy postawieni w sytuacji, w której należy wykorzystać kompetencje matematyczne. Umiejętności niezbędne do funkcjonowania człowieka to nie tylko obliczenie należności za zakupy, przyrządzenie zalewy o określonym stężeniu, przygotowanie odpowiedniej ilości produktów według podanego przepisu, ale również oszacowanie czasu przejazdu przy podanej odległości i planowanej szybkości, obliczenie ilości potrzebnych materiałów w celu wykonania remontu, kalkulacji kosztów kredytu czy ubezpieczenia, określenie szans wygranej w grach losowych proponowanych przez różne podmioty. W niniejszym opracowaniu pokazano, w jaki sposób gimnazjalne zadania egzaminacyjne badają umiejętności uczniów w zakresie rozwiązywania zadań z kontekstem praktycznym. W tym celu przeanalizowano zadania wykorzystane podczas sesji egzaminacyjnych w latach 2012–2017 oraz wybrano zadania otwarte, które dotyczą zastosowania matematyki do rozwiązywania problemów.

Zaobserwowane sposoby podejścia do zagadnień rozważanych w zadaniach dostarczyły autorkom informacji na temat procedur ich rozwiązywania oraz używanych strategii. Wnioski wynikające z analiz są uniwersalne, zatem przydatne w pracy z uczniami na wszystkich etapach edukacyjnych.

Wymagania ogólne i treści nauczania zadań realizujących postulat przydatności w praktyce

Ze względu na założony cel obserwacji, tj. stosowanie strategii rozwiązywania problemów oraz stosowanych procedur dochodzenia do wyniku, do badań wytypowano zadania otwarte, które uczniowie rozwiązywali podczas egzaminów w latach 2012–2017. W tym okresie wykorzystano dziewięć zadań otwartych, którym przypisano wymaganie ogólne *Modelowanie matematyczne* lub *Użycie i tworzenie strategii* i które badały umiejętności rozwiązywania problemów osadzonych w kontekście praktycznym. Szczegółowe informacje dotyczące badanych umiejętności oraz zasad oceniania tych zadań można znaleźć na stronie internetowej Centralnej Komisji Egzaminacyjnej.

Na wykresie przedstawiono poziom wykonania wskazanych zadań otwartych.



Wykres 1. Poziom wykonania zadań z kontekstem praktycznym

Zadania o numerze 23 to zadania geometryczne, które sprawiały uczniom największe problemy, a ich poziom wykonania nie przekroczył 40%. Najłatwiejsze okazało się zadanie 21 z 2014 roku. Poziom jego wykonania wyniósł 67%, a do rozwiązania wystarczyła umiejętność wykonywania działań w zbiorze liczb naturalnych.

Rozwiązanie pozostałych zadań wymagało zazwyczaj zastosowania algebry.

Uczniowie poradzili sobie z nimi nieco lepiej niż z zadaniami geometrycznymi, ale były trudniejsze niż zadanie arytmetyczne.

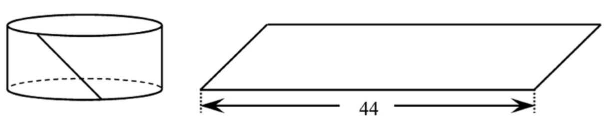
Ze względu na ograniczoną objętość materiału do analizy wybrano cztery zadania otwarte, w tym dwa geometryczne i dwa rachunkowe (jaśniejsze słupki na wykresie). Oto ich treści.

Zadanie 21. (0–3)/2014

Cena godziny korzystania z basenu wynosi 12 zł. Można jednak kupić miesięczną kartę rabatową za 50 złotych, upoważniającą do obniżki cen, i wtedy za pierwsze 10 godzin pływania płaci się 8 złotych za godzinę, a za każdą następną godzinę 9 złotych. Wojtek kupił kartę rabatową i korzystał z basenu przez 16 godzin. Czy zakup karty był dla Wojtka opłacalny? Zapisz obliczenia.

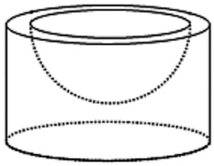
Zadanie 23. (0–4)/2015

Po rozklejeniu ściany bocznej pudełka mającego kształt walca otrzymano równoległobok. Jeden z boków tej figury ma długość 44 cm, a jej pole jest równe 220 cm^2. Oblicz objętość tego pudełka. Przyjmij przybliżenie π równe 22/7. Zapisz obliczenia.



Zadanie 23. (0–3)/2016

Pojemnik z kremem ma kształt walca o promieniu podstawy 4 cm i wysokości 4,5 cm. Po jego otwarciu okazało się, że krem wypełnia tylko wyżłobioną w pojemniku półkulę o promieniu 3 cm. Ile razy objętość tej półkuli jest mniejsza od objętości walca? Zapisz obliczenia.



Zadanie 22. (0–3)/2017

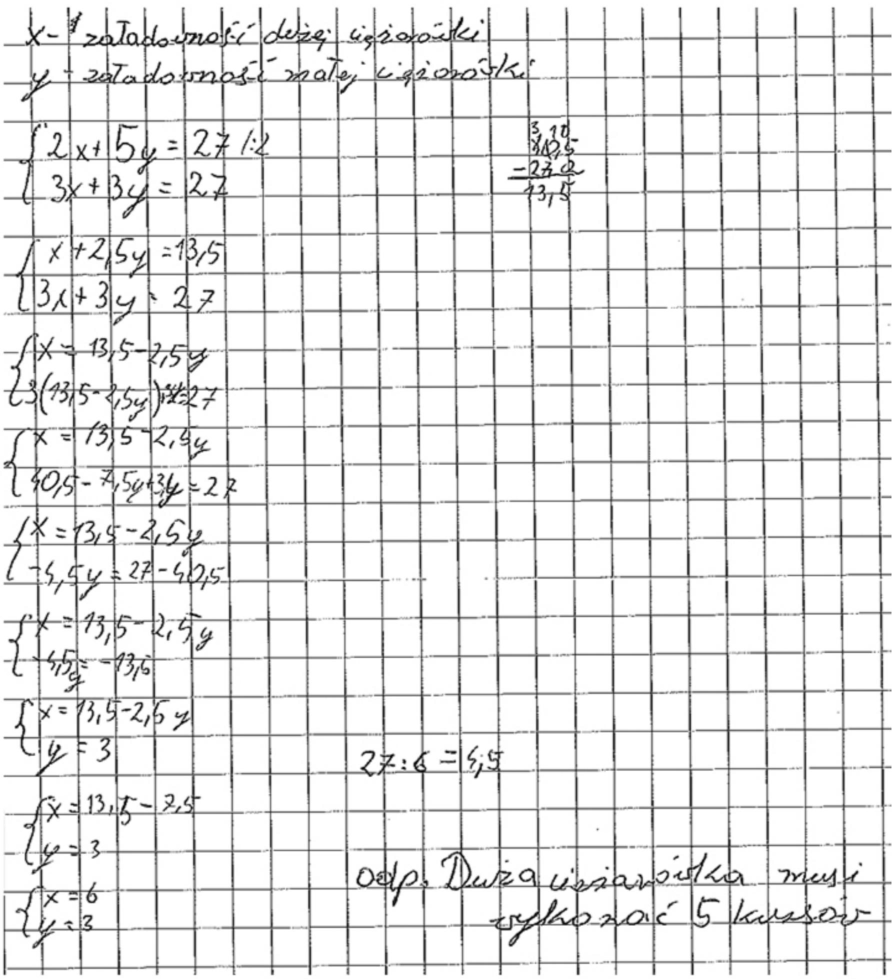
Do przewiezienia 27 ton żwiru potrzeba 5 małych i 2 dużych ciężarówek albo 3 małych i 3 dużych ciężarówek (przy wykorzystaniu całkowitej ich ładowności). Ile co najmniej kursów musi wykonać jedna duża ciężarówka, aby przewieźć 27 ton żwiru? Zapisz obliczenia.

Podejścia zorientowane na rozwiązanie problemu

Do rozwiązania zadań praktycznych nie wystarczy wyposażenie ucznia w niezbędne środki, takie jak znajomość wzorów, definicji, twierdzeń, umiejętność wykonywania działań czy rozwiązywania równań. Ważnym elementem jest dostarczenie repertuaru sposobów działania, takich jak interpretowanie treści, zapisywanie równań, przekształcanie wzorów, stosowanie twierdzeń.

Podczas edukacji szkolnej ustalony przebieg rozwiązywania zadań jest wielokrotnie ćwiczony, aby utrwalił się na tyle, by uczeń dysponował gotową strategią za każdym razem, gdy zetknie się z analogicznym zagadnieniem. Uczeń rozwiązujący zadanie wybiera i stosuje znaną z lekcji procedurę. Poniżej przedstawiono przykłady rozwiązań, gdzie uczeń poprawnie zinterpretował treść zadania i przedstawił pełne rozwiązanie. Sposób postępowania jest zgodny ze schematem znanym z lekcji, w którym można wyróżnić etapy rozwiązania i ich współzależność oraz wykaz czynności gwarantujących skuteczność. W przykładach 1 i 2 było to zapisanie układu równań, rozwiązanie go i wykorzystanie otrzymanego rozwiązania do ustalenia odpowiedzi. Natomiast w przykładach 3–5 ustalenie warunków (zależności), zapisanie i wykonanie niezbędnych obliczeń, a następnie interpretacja wyniku.

Przykład 1. (22/2017)


x – załadowności dużej ciężarówki
y – załadowności małej ciężarówki

$$\begin{cases} 2x+5y=27 \quad /:2 \\ 3x+3y=27 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 40,5 \\ -27,0 \\ \hline 13,5 \end{array}$$

$$\begin{cases} x+2,5y=13,5 \\ 3x+3y=27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=13,5-2,5y \\ 3(13,5-2,5y)+3y=27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=13,5-2,5y \\ 40,5-7,5y+3y=27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=13,5-2,5y \\ -4,5y=27-40,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=13,5-2,5y \\ -4,5y=-13,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=13,5-2,5y \\ y=3 \end{cases}$$

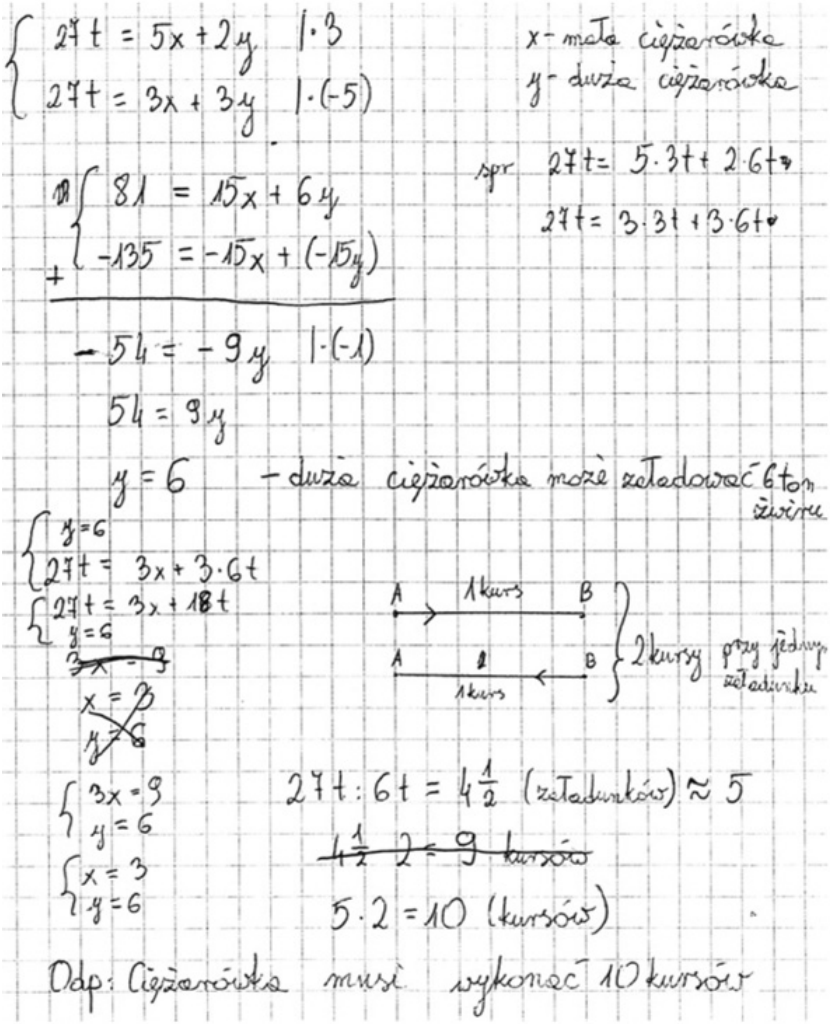
$27:6=4,5$

$$\begin{cases} x=13,5-2,5 \\ y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$$

odp. Duża ciężarówka musi wykonać 5 kursów

Przykład 2. (22/2017)



$$\begin{cases} 27t = 5x + 2y & | \cdot 3 \\ 27t = 3x + 3y & | \cdot (-5) \end{cases}$$

x – mała ciężarówka
y – duża ciężarówka

spr $27t = 5 \cdot 3t + 2 \cdot 6t$
$27t = 3 \cdot 3t + 3 \cdot 6t$

$$\begin{cases} 81 = 15x + 6y \\ -135 = -15x + (-15y) \end{cases}$$

$+$

$$-54 = -9y \quad | \cdot (-1)$$

$$54 = 9y$$

$y = 6$ – duża ciężarówka może załadować 6 ton żwiru

$$\begin{cases} y = 6 \\ 27t = 3x + 3 \cdot 6t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 27t = 3x + 18t \\ y = 6 \end{cases}$$

$\cancel{3x = 9}$

$\cancel{x = 3}$
$\cancel{y = 6}$

$$\begin{cases} 3x = 9 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases}$$

A 1 kurs B
A 1 kurs B
2 kursy przy jednym załadunku

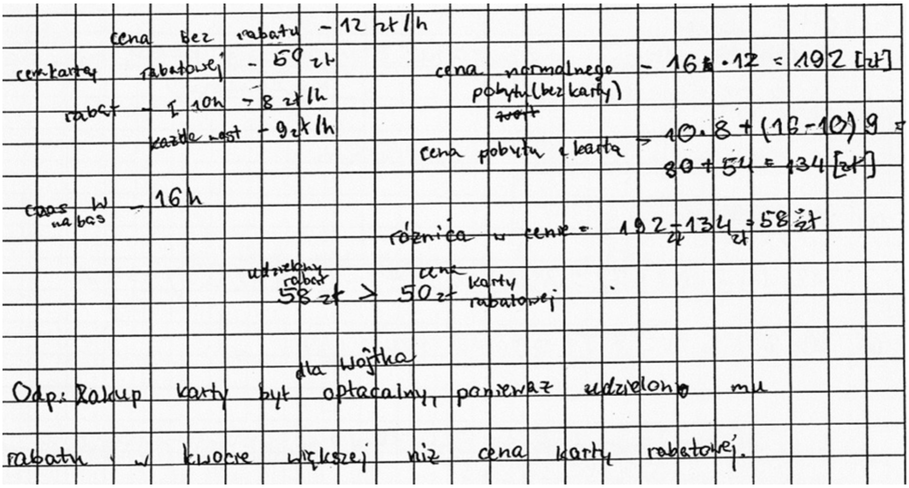
$27t : 6t = 4\frac{1}{2}$ (załadunków) ≈ 5

$\cancel{4\frac{1}{2} \cdot 2 = 9}$ ~~kursów~~

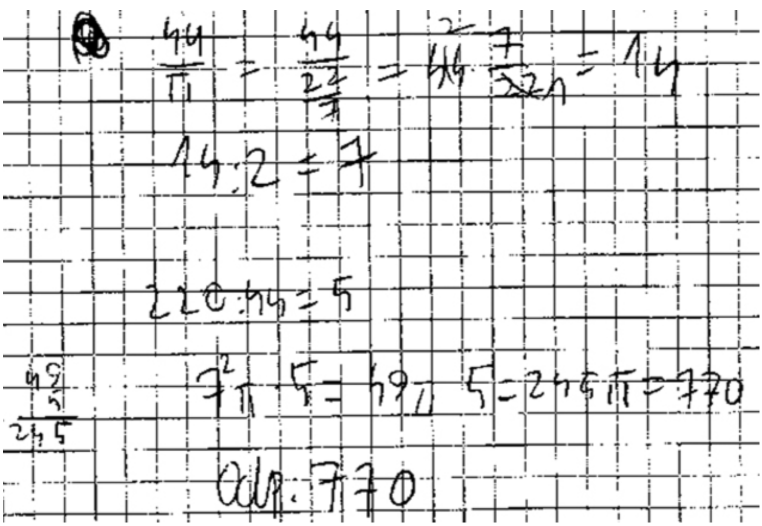
$5 \cdot 2 = 10$ (kursów)

Odp: Ciężarówka musi wykonać 10 kursów

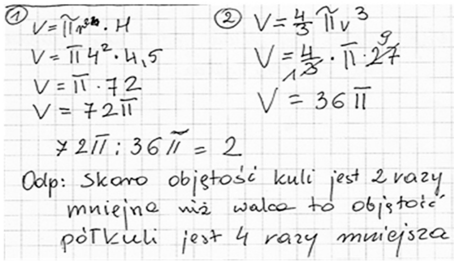
Przykład 3. (21/2014)



Przykład 4. (23/2015)



Przykład 5. (23/2016)



① $V=\pi r^2\cdot H$

$V=\pi 4^2\cdot 4{,}5$

$V=\pi\cdot 72$

$V=72\pi$

② $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

$V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 27$

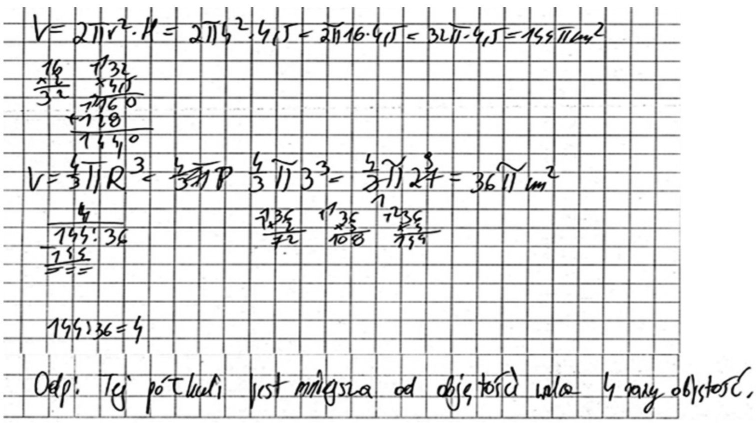
$V=36\pi$

$72\pi : 36\pi = 2$

Odp: Skoro objętość kuli jest 2 razy mniejna niż walca to objętość półkuli jest 4 razy mniejsza.

Drugą grupę rozwiązań stanowią te, w których uczeń radzi sobie z rozwiązaniem problemu w sposób nieschematyczny.

Przykład 6. (23/2016)



$V=2\pi r^2\cdot H = 2\pi 4^2\cdot 4{,}5 = 2\pi 16\cdot 4{,}5 = 32\pi\cdot 4{,}5 = 144\pi\, cm^2$

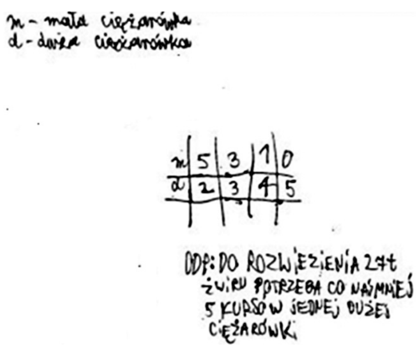
$V=\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 3^3 = \frac{4}{3}\pi 27 = 36\pi\, cm^2$

$144 : 36 = 4$

Odp. Tej półkuli jest mniejsza od objętości walca 4 razy objętość.

Uczeń przed przystąpieniem do obliczeń dostrzegł inny sposób rozwiązania problemu i zrealizował go. Nietypowość rozwiązania polegała na tym, że złożył dwa opakowania tak, aby powstał walec o wysokości dwa razy większej niż wyjściowy, z wyżłobioną kulą zamiast półkuli. Taki zabieg nie zmienił stosunku objętości brył.

Przykład 7. (22/2017)



m - mała ciężarówka

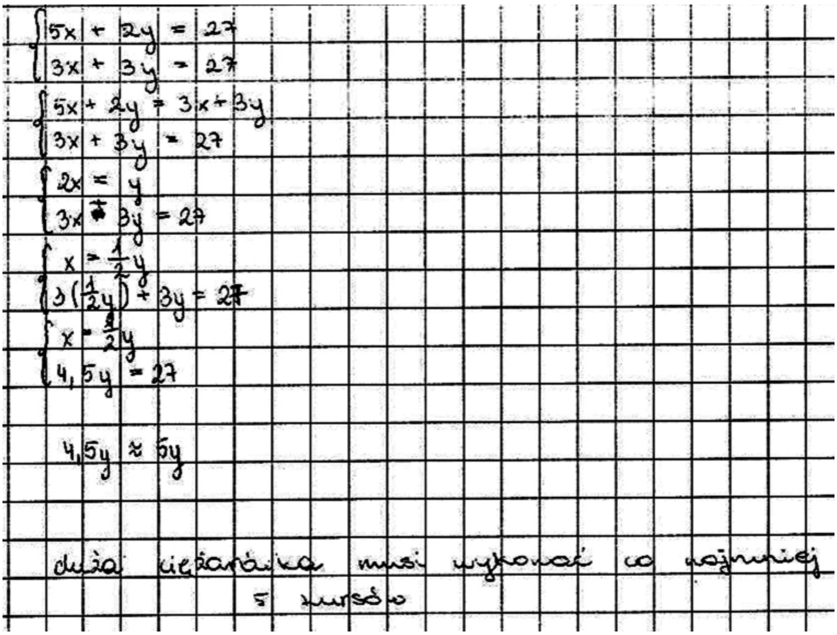
d - duża ciężarówka

m	5	3	1	0
d	2	3	4	5

ODP: DO ROZWIEZIENIA 27t ŻWIRU POTRZEBA CO NAJMNIEJ 5 KURSÓW JEDNEJ DUŻEJ CIĘŻARÓWKI

Uczeń rozwiązujący to zadanie dostrzegł zależność między liczbą dużych i małych ciężarówek potrzebnych do przewiezienia 27 ton żwiru. Wykorzystując to spostrzeżenie, zapisał w tabeli, jak zmienia się liczba dużych ciężarówek w stosunku do liczby małych. Na tej podstawie wywnioskował, że aby zredukować do 0 liczbę małych ciężarówek, należy użyć 5 dużych, co przeliczył na liczbę kursów dużej ciężarówki.

Przykład 8. (22/2017)



$$\begin{cases}5x + 2y = 27\\ 3x + 3y = 27\end{cases}$$

$$\begin{cases}5x + 2y = 3x + 3y\\ 3x + 3y = 27\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x = y\\ 3x + 3y = 27\end{cases}$$

$$\begin{cases}x = \frac{1}{2}y\\ 3(\frac{1}{2}y) + 3y = 27\end{cases}$$

$$\begin{cases}x = \frac{1}{2}y\\ 4,5y = 27\end{cases}$$

$$4,5y \approx 5y$$

duża ciężarówka musi wykonać co najmniej 5 kursów

Uczeń nie opisał niewiadomych, co było dopuszczalne w zasadach oceniania, zapisał poprawny układ równań i wykonał przekształcenia niezbędne do jego rozwiązania. W trakcie rozwiązywania po otrzymaniu zależności $4,5y = 27$ zauważył, że do ustalenia liczby kursów dużej ciężarówki nie musi obliczać jej ładowności. Zatem zakończył rozwiązanie, formułując poprawny wniosek.

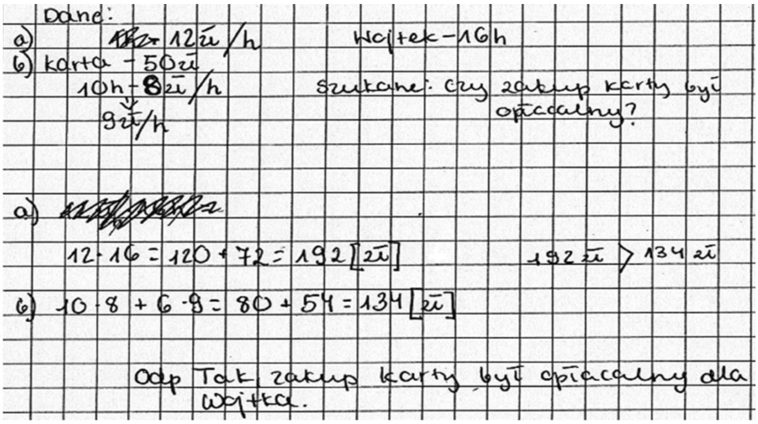
Podejścia zorientowane na wynik

Zadania z kontekstem praktycznym, oprócz zaplanowania rozwiązania i zrealizowania go, zazwyczaj wymagają interpretacji otrzymanego wyniku. Zamiast sformułowania pytania wprost, np. *Ile zaoszczędził, kupując kartę?,* pojawia się pytanie: *Czy zakup karty był opłacalny?*, zamiast polecenia: *Oblicz ładowność dużej ciężarówki* zastosowano pytanie: *Ile co najmniej kursów musi wykonać jedna duża ciężarówka, aby przewieźć 27 ton żwiru?.* Tak postawione pytania zmuszają do refleksji nad otrzymanym wynikiem. Oznacza to, że rozwiązujący powinien odnieść się do treści zadania, upewniając się, że kolejne etapy zostały wykonane poprawnie, oraz sprawdzając, czy wszystkie warunki zostały spełnione i czy wynik, który otrzymał, uprawnia do udzielenia odpowiedzi.

Nie mniej istotnym elementem jest refleksja nad realnością i sensownością otrzymanego wyniku, co ma szczególne znaczenie ze względu na kontekst rozpatrywanego problemu.

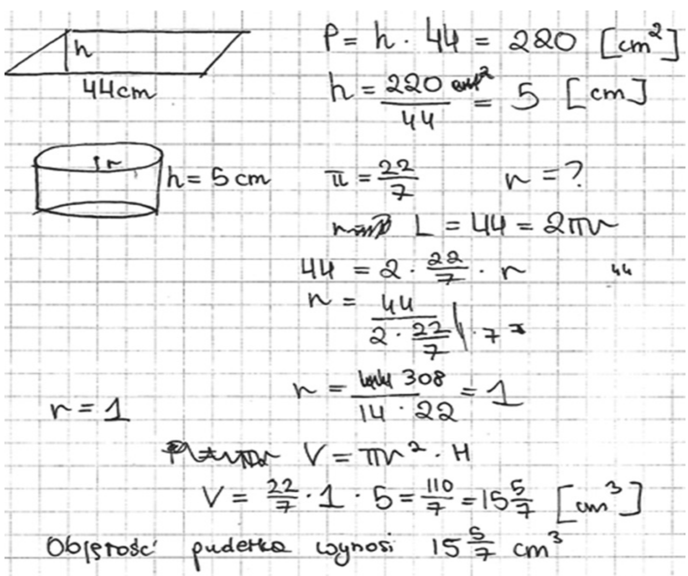
Poniżej przedstawiono przykłady, w których poprawnie zinterpretowano treści zadań oraz wykorzystano właściwe narzędzia do ich rozwiązania, ale w ostatnim etapie rozwiązania zabrakło refleksji nad otrzymanym wynikiem.

Przykład 9. (21/2014)



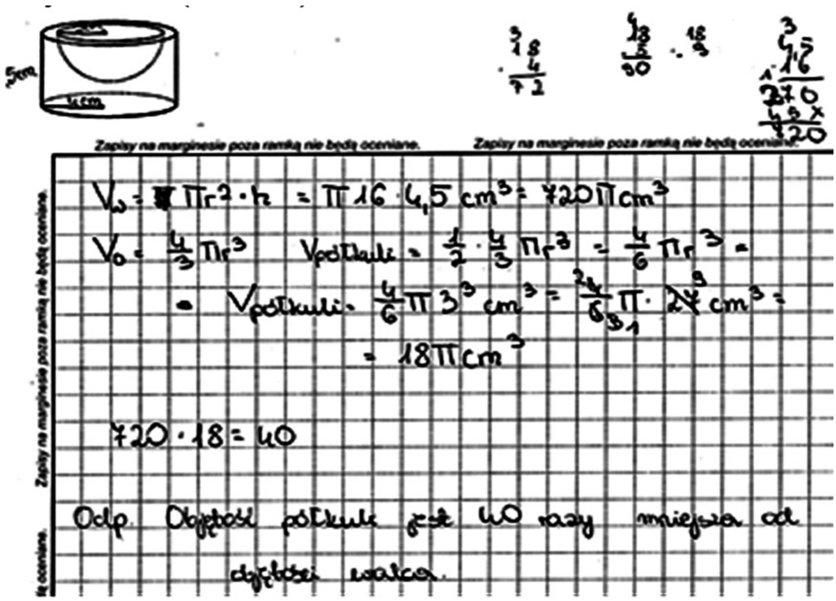
W analizie treści zadania uczeń zapisał cenę karty rabatowej jako jeden ze składników kosztów, ale z zapisu porównania 192 zł > 134 zł wynika, że nie uwzględnił tej kwoty, udzielając odpowiedzi.

Przykład 10. (23/2015)



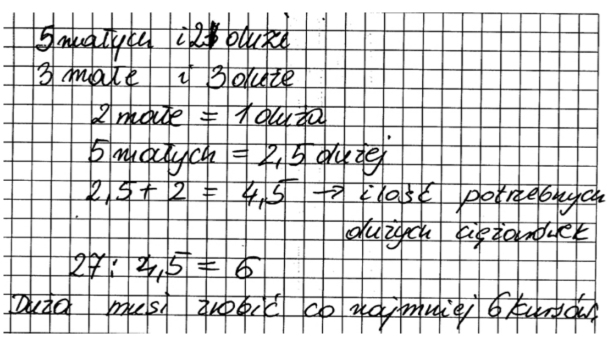
Uczeń w wyniku błędnego przekształcenia otrzymał promień podstawy walca, który wykorzystał do dalszych obliczeń. Bezkrytyczne przyjęcie tak małego promienia w stosunku do obwodu koła świadczy o tym, że skupił się wyłącznie na osiągnięciu celu, którym było obliczenie objętości walca.

Przykład 11. (23/2016)



Otrzymanie takiej dysproporcji między pojemnością naczynia i objętością kremu w praktyce jest nieracjonalne, czego nie dostrzegł uczeń usatysfakcjonowany uzyskanym „okrągłym" wynikiem po wykonaniu wszystkich koniecznych obliczeń.

Przykład 12. (22/2017)



Uczeń przeliczył ładunek na duże ciężarówki i skomentował otrzymany wynik: 4,5, ale nie zauważył, że w tym momencie wystarczy już tylko go poprawnie zinterpretować. Wykonanie dzielenia świadczy o tym, że nie do końca jest świadomy swoich działań.

Wnioski

Nauczanie zorientowane na rozwiązanie problemu sprzyja samodzielności uczniów, twórczej postawie i wyzwala refleksję na temat sensowności otrzymanych wyników. W zaobserwowanych rozwiązaniach zadań problemowych przeważają takie, w których uczeń doszedł do wyniku, odtwarzając krok po kroku przepis poznany i wyćwiczony na lekcjach. Strategie zorientowane na szukanie relacji między danymi, odkrywanie zależności i podobieństw były rzadziej stosowane przez uczniów, ale mniej podatne na błędy techniczne.

We wzmagającej się międzynarodowej konkurencji mogą skutecznie uczestniczyć tylko ci, którzy posiedli umiejętność wczesnego rozpoznawania codziennych problemów i ich rozwiązywania. Zatem proces nauczania matematyki powinien być nakierowany na rozumienie, a nie na odtwarzanie treści matematycznych oraz na wyposażanie uczniów w umiejętność świadomego i celowego korzystania w sytuacji praktycznej z wiedzy nabytej w szkole.

Obserwacje rozwiązań uczniowskich na egzaminie gimnazjalnym z matematyki sprowokowały autorki do sformułowania wniosków do pracy z uczniami. Wdrożenie do twórczego rozwiązywania problemów można osiągnąć poprzez stopniowe wprowadzanie w obszar zastosowań matematyki i „oswajanie" zadań z tekstem już od najniższych klas. Można to realizować np. poprzez zaproponowane niżej działania.

1. Stawianie uczniów w sytuacjach realnego zastosowania matematyki i dbanie, aby rozwiązywali zadania w różnych wariacjach w celu nabycia elastyczności myślenia i działania.
2. Szacowanie wyników zadań osadzonych w kontekście praktycznym przed przystąpieniem do ich rozwiązania. Powrót do wyniku szacowania po rozwiązaniu zadania. Dyskusja na temat realności podanych szacunkowych wyników, określanie możliwych granic liczbowych wyniku.
3. Stwarzanie uczniom okazji do działania. Powinno to dotyczyć w szczególności zadań wymagających widzenia przestrzennego. W celu rozwijania wyobraźni przestrzennej warto stosować modele brył, również wykonywanych własnoręcznie przez uczniów, zestawiać klocki w różne bryły, opisywać ich własności oraz obliczać pola i objętości. Kolejną czynnością może być identyfikowanie brył na podstawie siatek oraz rysunków wykonanych w różnych położeniach albo rozpoznawanie kształtu figury z opisu lub cienia.
4. Pokazywanie powiązań wiedzy już posiadanej z aktualnie zdobywaną, co prowadzi do lepszego rozumienia pojęć matematycznych i relacji między nimi oraz nabywania umiejętności stosowania zasad i procesów matematycznych w sytuacjach szkolnych i pozaszkolnych.
5. Wyzwalanie samodzielności i zaradności w poszukiwaniu strategii radzenia sobie z problemami matematycznymi w szkole oraz ich odpowiednikami w życiu poprzez przyzwyczajanie do szukania zależności i relacji między danymi, znajdowanie podobieństw i różnic, odkrywanie własności, formułowanie hipotez i weryfikowanie ich.
6. Umożliwianie uczniom prezentowania osobistych, zarówno skróconych, jak i zawiłych, strategii rozwiązywania problemu i unikanie narzucania schematów postępowania, które ograniczają aktywność i niekiedy są traktowane przez uczniów jak niczemu niesłużący rytuał.

Bibliografia

Góralski A. *Twórcze rozwiązywanie zadań,* PWN, Warszawa 1980.
Klus-Stańska D., Nowicka M. *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej,* WSiP, Warszawa 2005.
Sprawozdania z egzaminu gimnazjalnego z lat 2012–2017, https://www.cke.edu.pl/egzamin-gimnazjalny/wyniki/ [dostęp: 12 lipca 2017].
Zasady oceniania zadań otwartych z lat 2012–2017, https://www.cke.edu.pl/egzamin-gimnazjalny/arkusze/ [dostęp: 12 lipca 2017].