Teoria i praktyka oceniania zewnętrznego
28–30 V 2001

Marek LEGUTKO
Okręgowa Komisja Egzaminacyjna
w Krakowie

POMIAROWE OBRACHUNKI Z MATURĄ Z MATEMATYKI

WSTĘP

Kiedyś W. W. Sawyer napisał, że tak naprawdę nikt nie wie, dlaczego uczy się w szkole matematyki. Nauczanie matematyki stało się akceptowanym przez wszystkich zwyczajem, podobnie jak np. podawanie ręki. Po prostu jest taki zwyczaj. W. W. Sawyer miał rację o tyle, że nie istnieje uznana przez wszystkich, jedynie słuszna, odpowiedź na pytanie, dlaczego uczniowie powinni uczyć się matematyki. Nie ma również powszechnej zgody przy określaniu postulowanych efektów nauczania „matematyki dla wszystkich", przy ustalaniu sposobu pomiaru tych efektów.

Zwolennicy włączenia matematyki do grupy przedmiotów obowiązkowo zdawanych na maturze powołują się czasami na doświadczenia amerykańskiego egzaminu SAT (*Scholastic achievement test*), złożonego z dwóch części: matematycznej i językowej. Wciąż ponawiane badania potwierdzają dobrą korelację wyników części matematycznej tego egzaminu z powodzeniem amerykańskich uczniów w dalszym kształceniu, w przyszłej pracy. Dlaczego tak jest? By osiągnąć sukces na tym egzaminie, uczeń musi umieć zrozumieć informacje zawarte w zadaniu, przeanalizować propozycje odpowiedzi do wyboru, odwołać się do nabytej wiedzy i umieć ją zastosować w praktyce, rozwiązując problem bądź eliminując niektóre odpowiedzi, umiejętnie i wytrwale atakować pojawiające się trudności, kontrolować efekty swojej pracy, uczyć się korzystając z rezultatów wcześniej rozwiązanych zadań, szybko pracować. Trzeba tu zaznaczyć, że matematyka na egzaminie SAT jest środkiem używanym do badania intelektualnej sprawności ucznia, a nie przedmiotem badania. Analiza przykładowych testów (zob. np. czasopismo „NIM" 27, s. 23–27) prowadzi do wniosku, że pomija się tu wiele istotnych elementów wiedzy i umiejętności składających się na matematyczną kompetencję ucznia. SAT nie próbuje mierzyć tego, co pomiarowi łatwo się nie poddaje, np. umiejętność abstrakcyjnego myślenia, budowania modeli matematycznych.

Powoływanie się na SAT w czasie dyskusji o maturze w Polsce wiąże się nieraz z tym, że zadania amerykańskiego testu odnoszą się do tzw. praktycznej matematyki, a w takim kierunku mają pójść zmiany naszej matury z matematyki. Koniecznie trzeba tu dodać, że do egzaminu SAT przystępują uczniowie w wieku piętnastu lat. Bezpośrednie przenoszenie amerykańskich doświadczeń na grunt polskiej matury jest więc raczej nieuzasadnione.

W wyrosłą z polskiej tradycji koncepcję matury z matematyki wpisane jest stawianie przed uczniem sporych trudności. Wprowadzenie obowiązku zdawania tego przedmiotu w szkole średniej (dawniej elitarnej, dziś masowej) wymusi zmianę tej tradycji. Czym zostanie zastąpiony elitarny egzamin z matematyki? Czy, podobnie jak w przypadku egzaminu SAT, matematyka może stać się środkiem badania na egzaminie intelektualnej sprawności abiturientów, a nie celem badania?

NIE TYLKO SZKOLNE WIADOMOŚCI

W ramach programu „Nowa Matura" podjęto próbę nowego opisu zadań matury z matematyki. W 1994 r. Wojewódzki Zespół Standaryzacji Matur z Łodzi opracował, pod kierunkiem Krystyny Pawlak i Ryszarda Szubańskiego, wymagania egzaminacyjne dla matury z matematyki, w których stwierdzano m.in., że zadania powinny stwarzać okazję do zaprezentowania uniwersalnych umiejętności warunkujących osiągnięcie sukcesu przy rozwiązywaniu problemów matematycznych. Łódzką listę dziesięciu takich umiejętności, wraz z opisem ich przejawów, wykorzystano później przy opisie wymagań maturalnych z matematyki w dwunastu województwach Polski Południowo-Wschodniej (zob. „NiM" 12, 1994, 10–11). Oto ta lista:

	Umiejętności	Przejawy
1.	Analiza problemu	Wyróżnienie elementów składowych problemu, wypunktowanie etapów postępowania przy rozwiązywaniu problemu
2.	Dokonywanie wyboru	Wybór zadań (3 z 5) nawiązujący do możliwości i wiedzy zdającego
3.	Poprawna interpretacja danych i szukanych. Określenie warunków rozwiązalności problemu	Poprawne opisy, rysunki, oznaczenia i założenia
4.	Stosowanie algorytmów	Poprawne, bez błędów rzeczowych, posługiwanie się schematami i wzorami
5.	Poprawne wnioskowanie	Wykorzystanie założeń, łączenie informacji
6.	Synteza	Zebranie pośrednich wyników i sformułowanie odpowiedzi
7.	Komunikowanie się	Rozumienie i właściwe używanie języka matematycznego, poprawny opis rozwiązywanych zadań, jasne przekazywanie informacji
8.	Dostrzeganie analogii i wykorzystanie intuicji	Wykorzystanie wcześniejszych rezultatów, oryginalne podejście do problemu
9.	Ekonomika działania	Wybór optymalnej drogi rozwiązania
10.	Redakcja pracy	Ciąg zapisów konsekwentny, w porządku odpowiadającym tokowi rozwiązania, staranność (czytelność) pracy

W następnych latach podejmowano różne, bardziej lub mniej udane opisy zadań matury z matematyki. W *Informatorze maturalnym 2000 Matematyka OKE* w Krakowie, wydanym przez Wydawnictwo Szkolne „Omega", znaleźć można ostatnią próbę:

Osiągnięcia absolwenta szkoły średniej (podstawa programowa matematyki)		Egzamin dojrzałości z matematyki powinien badać, czy absolwent szkoły średniej:
I.	Operowanie podstawowymi obiektami matematycznymi	— zna podstawowe terminy matematyczne i potrafi przeczytać (napisać) prosty tekst matematyczny; — zna podstawowe pojęcia matematyczne i stosuje je w typowych sytuacjach zadaniowych; — potrafi stosować podstawowe algorytmy w typowych sytuacjach; — potrafi rozwiązywać typowe zadania matematyczne.
II.	Przeprowadzanie prostych rozumowań dedukcyjnych	— zna podstawowe twierdzenia matematyczne i potrafi je zastosować w sytuacjach zadaniowych; — potrafi przedstawić argumentację wykorzystującą znane definicje, twierdzenia i podstawowe reguły wnioskowania.
III.	Zdobycie umiejętności przydatnych w życiu codziennym	— potrafi dobrać model matematyczny do opisania sytuacji z życia codziennego (w prostych lub typowych przypadkach); — potrafi wykorzystać swoje umiejętności z różnych działów matematyki przy rozwiązywaniu problemów życia codziennego; — umie obliczać prawdopodobieństwa, odczytywać informacje z tabel, wykresów i diagramów.
IV.	Precyzyjne formułowanie myśli	— potrafi przeanalizować treść zadania (problemu) wyodrębniając dane i niewiadome; — potrafi ustalić plan rozwiązania zadania (problemu) określając cele do osiągnięcia w poszczególnych częściach tego planu; — potrafi czytelnie opisać tok swojego rozumowania; — potrafi podsumować swoje rozumowanie i przedstawić osiągnięty rezultat.

Powyższe opisy wymagań maturalnych ukazują, że — przynajmniej w warstwie deklaracji — zmieniło się tradycyjne podejście do matury z matematyki. Matematyczne treści nie są już na pierwszym planie. Egzamin maturalny może służyć badaniu uniwersalnych sprawności intelektualnych abiturienta. Na podkreślenie zasługuje fakt, że powyższe listy były efektem długotrwałej pracy warsztatowej z nauczycielami praktykami w ramach programu „Nowa Matura". Są zapisem refleksji nad obecną praktyką, zmierzają do jej zmiany.

W okresie funkcjonowania programu „Nowa Matura" wprowadzono wiele innych zmian postulowanych przez samych nauczycieli. Oto niektóre z nich:

— ograniczono liczbę wariantów zestawów do pisemnego egzaminu dojrzałości z 11 do 4, dążąc do porównywalności egzaminu oraz do ujednolicenia wymagań;
— wprowadzono kryterialny sposób oceniania prac maturalnych (kilkukrotnie modyfikowany, wzorowany na punktowych systemach krajów zachodnich);
— określono wymagania egzaminacyjne (po długich dyskusjach), przykładowe zadania maturalne z matematyki, kryteria oceniania ich rozwiązań, arkusze recenzji prac; wymagania i inne materiały pomocnicze rozpowszechniano wśród nauczycieli i uczniów w wydawanych co roku *Informatorach maturalnych*;
— wprowadzono zasadę, że Państwowe Komisje Egzaminacyjne w szkołach otrzymują wraz z tematami egzaminu maturalnego szczegółowy schemat punktowania przy ocenianiu prac (tzw. „klucze rozwiązań" zadań); klucze te od 1999 r. publikuje prasa codzienna następnego dnia po maturze;
— wprowadzono „wojewódzkie", a później „regionalne" i „okręgowe" próbne matury; dzięki nim oraz dzięki materiałom zawartym w informatorach maturalnych uczniowie stają się bardziej świadomi wymagań stawianych na maturze z matematyki; obserwowana jest tendencja polepszania się wyników matury z matematyki (zob. np. raporty opisujące wyniki matur z matematyki w kolejnych rocznikach czasopisma „NiM" w latach 1995–1999 oraz raport na stronach internetowych OKE w Krakowie z wynikami matury z matematyki w r. 2000);
— zestawy zadań maturalnych są układane przez zespoły autorów według wcześniejszych, wspólnych dla różnych województw, scenariuszy i zasad.

Najważniejszą zmianą jest niewątpliwie wykształcenie się, dzięki kilkuletnim szkoleniom nauczycieli w zakresie kryterialnego oceniania prac maturalnych, wspólnej dla nauczycieli różnych szkół „kultury oceniania prac maturalnych z matematyki".

JAKIE ZADANIA NA MATURĘ Z MATEMATYKI?

W okresie ostatnich lat zmieniły się również zadania maturalne. Nie ma już np. tzw. „zadań-kombajnów", sztucznie łączących różne działy matematyki.

Niestety, w praktyce egzaminacyjnej wciąż dominują zadania ukierunkowane na „wyczyn matematyczny". Wprowadzenie zadań akcentujących nie treści programu, lecz uniwersalne sprawności intelektualne, dla których matematyka stanowi kontekst, nie jest łatwe.

Poniższy przykład dwóch zadań maturalnych z matematyki z r. 1998 może być dobrą ilustracją problemów związanych z wprowadzaniem zmian w maturze z matematyki.

ZADANIE 1

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$(m-2)\,x^3-(2m-1)\,x^2+(m+3)\,x=0$$

ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste nieujemne.

ZADANIE 2

Pan Kowalski ma zwrócić do banku kwotę w wysokości 12 000 zł. Bank zgodził się na następujący wariant spłaty: w pierwszym miesiącu Pan Kowalski wpłaci 1500 zł, a w każdym następnym o 100 zł mniej niż w poprzednim.

Przez ile miesięcy Pan Kowalski będzie zwracał pieniądze i jaka będzie ostatnia rata spłaty?

Jaki procent kwoty spłaci Pan Kowalski w ciągu pierwszego roku?

Które z tych zadań było łatwiejsze, które zyskało lepsze opinie nauczycieli?

Przed udzieleniem odpowiedzi warto może przyjrzeć się propozycji kryteriów oceny rozwiązań powyższych zadań, którą przesłano do szkół:

ZADANIE 1

1.	Zapisanie równania w postaci alternatywy równań	0,5 p.	$x = 0 \vee (m-2)x^2 - (2m\ 1)x + m + 3 = 0$
2.	Zapisanie warunków koniecznych i wystarczających dla istnienia trzech różnych nieujemnych pierwiastków równania	1,5 p.	$\begin{cases} m - 2 \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$
3.	Wyznaczenie wartości parametru m spełniających warunek $m - 2 \neq 0$	0,5 p.	$m \neq 2$
4.	Wyznaczenie wartości parametru m spełniających warunek $\Delta > 0$	1 p.	$m \in (-\infty, \frac{25}{8})$
5.	Wyznaczenie wartości parametru m spełniających warunek $\frac{m+3}{m-2} > 0$	1,5 p.	$m \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$
6.	Wyznaczenie wartości parametru m spełniających warunek $\frac{2m-1}{m-2} > 0$	1,5 p.	$m \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$
7.	Wyznaczenie m spełniających koniunkcję powyższych warunków	1 p.	$m \in (-\infty, -3) \cup (2, \frac{25}{8})$
8.	Sformułowanie odpowiedzi	0,5 p.	

ZADANIE 2

1.	Wyznaczenie pierwszego wyrazu odpowiedniego ciągu arytmetycznego i różnicy tego ciągu	1 p.	$a_1 = 1500, r = -100$
2.	Ułożenie równania $S_n = 12\,000$ z niewiadomą n	2 p.	$n^2 - 31n + 240 = 0$
3.	Rozwiązanie tego równania kwadratowego	1 p.	$n = 15 \lor n = 16$
4.	Obliczenie 15. i 16. wyrazu ciągu arytmetycznego	1 p.	$a_{15} = 100, a_{16} = 0$
5.	Obliczenie S_{12}	2 p.	$S_{12} = 11\,400$
6.	Ustalenie, jakim procentem całej kwoty jest S_{12}	1 p.	95%
7.	Komentarz dotyczący wykorzystywanych własności ciągu arytmetycznego oraz sformułowanie odpowiedzi do poszczególnych etapów rozwiązania zadania	2 p.	

Wszystkie szkoły proszono o zebranie danych obrazujących, jak zdający wybierali zadania, jak sobie radzili z ich rozwiązaniem, jaką ocenę dostali na maturze pisemnej z matematyki w zestawieniu ze szkolną oceną końcową.

Po egzaminie tworzono metryczkę zadania, zawierającą informacje (w procentach), o tym:

a) ilu maturzystów wybrało dane zadanie?

b) ilu z tych, którzy zadanie wybrali, uzyskało co najmniej 7 punktów (zaliczyło zadanie)?

c) ile punktów zdobyto w stosunku do liczby punktów możliwych do zdobycia?

Na łatwość zadania wskazywała wielkość procentu podawanego w metryczce zadania. Im ten procent był większy, tym łatwiejsze było dane zadanie.

W każdej szkole pytano też nauczycieli matematyki o ich opinie o każdym zadaniu maturalnym, w tym o:

a) stopień trudności zadania (–1 — duży, 0 — średni, 1 — mały);

b) czasochłonność rozwiązywania zadania (–1 — duża, 0 — średnia, 1 — mała);

c) zgodność zadania z programem (–1 — mała, 0 — częściowa, 1 — duża);

d) sformułowanie treści zadania (–1 — niejasne, 0 — średnio jasne, 1 — całkowicie jasne);

e) trafność doboru zadania na egzamin (–1 — mała, 0 — częściowa, 1 — duża);

f) opis rozdziału punktów za rozwiązanie zadania (–1 — niejasny, 0 — średnio jasny, 1 — całkowicie jasny);

g) trudność stosowania kryteriów oceny zadania (–1 — duża, 0 — średnia, 1 — mała).

Jeśli odpowiadając na dane pytanie, m nauczycieli wybrało odpowiedź „–1", n nauczycieli wybrało „0", a p wybrało „1", to jako zbiorczą odpowiedź podawano średnią ważoną:

$$\frac{-1 \cdot m + 0 \cdot n + 1 \cdot p}{m + n + p}$$

Jeśli ta średnia miała wartość dodatnią, to znaczy, że przeważały odpowiedzi pozytywne. Ocena nauczycieli była tym wyższa, im średnia ta była bliższa 1.

Oto dane zebrane po maturze z matematyki w 1998 r. dotyczące powyższych dwóch zadań:

METRYCZKA ZADANIA 1

Wybór	zaliczenie zadania	łatwość
83%	87%	92%

OPINIE NAUCZYCIELI O ZADANIU 1

łatwe	krótkie	zgodne	jasne	trafne	punkty	kryteria
0,92	0,92	1	1	0,83	1	0,75

METRYCZKA ZADANIA 2

Wybór	zaliczenie zadania	łatwość
72%	65%	77%

OPINIE NAUCZYCIELI O ZADANIU 2

łatwe	krótkie	zgodne	jasne	trafne	punkty	kryteria
0,25	0,1	0,35	0,6	0,2	0,35	0,1

Powyższe dane potwierdzać mogą trudności we wprowadzeniu zadań praktycznych na egzamin maturalny. Zadania czysto matematyczne, bliższe praktyce szkolnej, są przychylniej oceniane przez nauczycieli, a abiturienci uzyskują lepsze wyniki.

„WRÓŻENIE" Z OCEN SZKOLNYCH

Dotychczasowy egzamin dojrzałości z matematyki, mimo kilkuletniego okresu wprowadzania kryterialnego oceniania prac maturalnych, nie miał w pełni cech egzaminu zewnętrznego. Wynikająca z powyżej opisanego przykładu presja, by zadania maturalne wiązały się ze szkolną praktyką, prowadzić też mogła do oczekiwania, że wewnątrzszkolne ocenianie dobrze prognozuje wyniki matury. W czasie funkcjonowania programu „Nowa Matura" podejmowano próby badania tego zagadnienia. Ilustruje to poniższy przykład.

Oto rozkład procentowy liczby abiturientów, którzy uzyskali na egzaminie maturalnym z matematyki (w 1998 r.) poszczególne stopnie szkolne. Przyjmując wciąż bardzo popularny w szkole model zamiany stopni szkolnych na punkty (niedostateczny = 1, mierny = 2, dostateczny = 3, dobry = 4, bardzo dobry = 5, celujący = 6) wyliczono średnią ocen z matury pisemnej z matematyki.

Oceny:	1	2	3	4	5	6	średnia
Zestaw 1	3%	15%	31%	31%	18%	1%	3,5
Zestaw 2	7%	27%	43%	20%	3%	0%	2,85

Który zestaw wypadł lepiej? Odpowiedź wydaje się oczywista: zestaw 1.

Zrobienie takiego porównania jest kuszące, ale nie do końca uprawnione. Przecież zestawy te pisały inne grupy uczniów, inaczej oceniane jeszcze przed maturą. W związku z tym proszono szkoły o zestawienie liczby uczniów, dla których różnica ocen $r = m - k$ między oceną na maturze m a oceną końcową k przyjmowała jedną z pięciu wartości:

$$(R1)\ r \leq -2;\ (R2)\ r = -1;\ (R3)\ r = 0;\ (R4)\ r = 1;\ (R5)\ r \geq 2.$$

Dla każdego zestawu obliczano też tendencję t różnicy między oceną na maturze i oceną końcową. Przyjmując, że N oznacza liczbę wszystkich abiturientów piszących dany zestaw, $R1 - R5$ oznacza liczbę abiturientów z taką różnicą między oceną na maturze i oceną końcową (zob. wyżej), tendencję obliczano według wzoru:

$$t = \frac{(-2 \cdot R1 + (-1) \cdot R2 + 0 \cdot R3 + 1 \cdot R4 + 2 \cdot R5)}{N}$$

Oto rozkład procentowy liczby abiturientów, dla których wystąpiły poszczególne różnice między stopniami na maturze a szkolnymi ocenami końcowymi:

Różnica:	R1	R2	R3	R4	R5	tendencja t
Zestaw 1	3%	11%	36%	38%	11%	0,433
Zestaw 2	6%	21%	42%	26%	4%	0,02

Wyniki zestawu 2 są bliższe ocenom wystawionym przez szkołę. Grupa abiturientów piszących zestaw 2 miała przy tym ogólnie słabsze oceny (byli to maturzyści ze szkół dla dorosłych).

Który z zestawów był lepiej dobrany? Zestaw 1 wypadł chyba jednak „za dobrze", jeśli przyjąć, że końcowe oceny szkolne powinny „prognozować" wyniki na maturze. Wyniki zestawu 2 lepiej odpowiadają prognozom. W obu przypadkach co najmniej dziesięć procent uczniów otrzymało na maturze z matematyki ocenę różniącą się o dwa stopnie od oceny końcowej.

PRZED DEBIUTEM MATEMATYCZNEJ MATURY W 2002 ROKU

Matematyka może być przedmiotem obowiązkowo zdawanym na egzaminie maturalnym, jeśli egzamin ten będzie, w szerszym niż dotąd zakresie, badał uniwersalne sprawności intelektualne abiturienta. Nie zawsze służą temu zadania z „czystej" matematyki, które adresowane są przede wszystkim do matematycznych „wyczynowców". Zadania z czystej matematyki, jako bliższe dominującej praktyce nauczania, są jednak bardziej oczekiwane.

Wyniki matury z takimi zadaniami można lepiej prognozować — dotyczy to jednak sytuacji, gdy matematyka jest przedmiotem wybieranym, a nie obowiązkowym.

Z powyższego wynika, że mamy tu do czynienia z błędnym kołem. Jeśli matematyka ma być obowiązkowa dla wszystkich, to zadania maturalne powinny być inne niż dotąd, jeśli jednak zmienimy rodzaj zadań, to musimy się liczyć ze słabszymi wynikami, które będzie trudno prognozować na podstawie rezultatów wewnątrzszkolnego oceniania.

W kwietniu 2001 r. w 16 miastach wojewódzkich małe grupy uczniów i dorosłych (VIP-ów) rozwiązywały zadania promujące maturę z matematyki z zadaniami nowego typu, zadaniami praktycznymi. Zestaw matematyczny (okrojony tylko do czterech zadań) wykorzystany w promocji uzyskał bardzo dobre recenzje, choć wyniki były zróżnicowane (mimo że zestaw rozwiązywali dobrzy uczniowie).

Wyjściem z błędnego koła, o którym mowa wyżej, może być dobrze przemyślana i przygotowana promocja nowego typu zadań maturalnych przez całe pierwsze półrocze roku szkolnego 2001/2002.