Karolina Kołodziej
Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie

Refleksje nad umiejętnościami gimnazjalistów w zakresie zastosowania wiedzy w praktyce, czyli jak to z dachem było

na podstawie części matematyczno-przyrodniczej

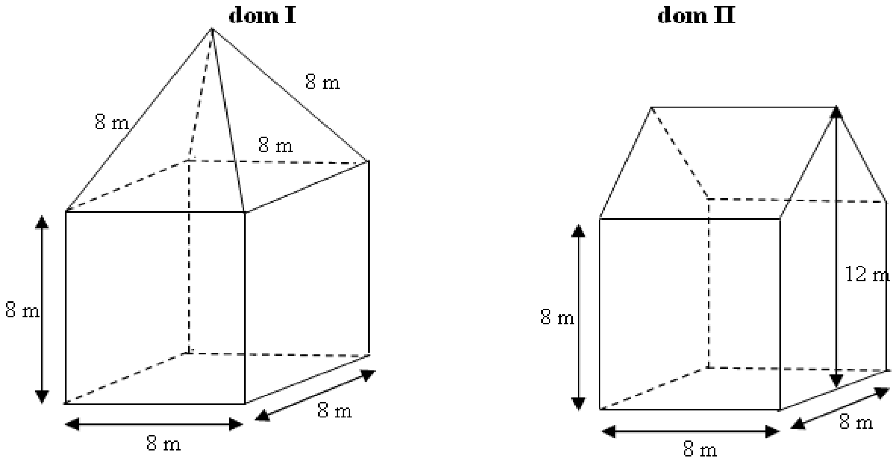
Wyniki polskich uczniów osiągane w badaniach PISA zarówno w zakresie umiejętności matematycznych, jak i rozwiązywania problemów skłoniły mnie do refleksji i porównań, których można dokonać na podstawie egzaminu gimnazjalnego z zakresu przedmiotów matematyczno-przyrodniczych. Elementem, który wiąże ze sobą badania PISA i egzamin gimnazjalny w tej części, jest IV obszar standardów wymagań egzaminacyjnych, czyli *Stosowanie zintegrowanej wiedzy i umiejętności do rozwiązywania problemów*. Analiza wyników kolejnych edycji egzaminu dowodzi, że umiejętności zaliczane do tego obszaru są najsłabiej opanowane przez polskich uczniów.

Poziom rozwiązywalności zadań egzaminu gimnazjalnego jest zróżnicowany, z reguły zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi są dla uczniów trudniejsze niż inne typy zadań. Zaprezentowanie toku rozumowania w trakcie rozwiązywania nie jest mocną stroną naszych uczniów. Analiza prac uczniowskich pod kątem metod rozwiązywania, sposobu prezentacji zapisu kolejnych kroków, popełnianych błędów ma służyć do wyciągnięcia wniosków i doboru metod nauczania, które pozwolą ten problem zniwelować. Podczas egzaminu gimnazjalnego w 2009 roku umiejętności uczniów w zakresie tworzenia i realizacji planu rozwiązania a także opracowywania i interpretacji wyników sprawdzano zadaniem 34.

Poniżej przedstawiono treść zadania oraz kryteria jego oceniania, a w dalszej części referatu próbę odpowiedzi na postawione po analizie rozwiązań problemy badawcze. Refleksja nad rozwiązaniami, sposobem formułowania zadań oraz schematem oceniania powinna pozwolić na doskonalenie zarówno narzędzi badawczych, jak i metod pracy z uczniami.

Zadanie 34. (0-5)

Na sąsiednich działkach wybudowano domy różniące się kształtem dachów (patrz rysunki). Który dach ma większą powierzchnię? Zapisz obliczenia.



Odpowiedź: ………………………………………………………………

Rozwiązanie zadania wymagało wykonania kolejnych, określonych w schemacie oceniania czynności:

1. ustalenie sposobu obliczenia wysokości ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego (zastosowanie twierdzenia Pitagorasa lub wykorzystanie własności trójkąta równobocznego),
2. ustalenie sposobu obliczenia pola powierzchni dachu domu I,
3. ustalenie sposobu obliczenia długości boku dachu domu II (zastosowanie twierdzenia Pitagorasa lub wykorzystanie własności przekątnej kwadratu),
4. ustalenie sposobu obliczenia pola powierzchni dachu domu II,
5. obliczenie pól powierzchni dachów domów I i II, zinterpretowanie wyniku.

Pytania badawcze

I. Jak gimnazjaliści zrozumieli zwrot „powierzchnia dachu"?
II. W jaki sposób rozumienie pojęcia dachu wpłynęło na poziom wykonania zadania?
III. Na ile uczniowie kończący gimnazjum znają wzory, twierdzenia i własności trójkątów określone w podstawie programowej a niezbędne do rozwiązywania zadań praktycznych?
IV. Co wpłynęło na zróżnicowanie wyników w szkołach oraz oddziałach danej szkoły?
V. Czy poziom wykonania tego zadania w klasach odbiega od poziomu wykonania innych zadań sprawdzających umiejętności z IV obszaru standardów wymagań egzaminacyjnych arkusza?

Analizie poddano 788 rozwiązań tego zadania, łącznie z 32 oddziałów w 8 szkołach publicznych usytuowanych na terenie krakowskiej OKE (tab. 1.). Dodatkowo wśród dyrektorów przeprowadzono ankietę dotyczącą sposobu tworzenia klas gimnazjalnych, realizacji siatki godzin matematyki w badanych klasach, nauczycieli uczących w szkole, metod przygotowywania uczniów do egzaminu, porównania wyników rocznej klasyfikacji w klasie III gimnazjum z wynikami egzaminu.

Tabela 1. Wykaz szkół wraz z liczbą uczniów, lokalizacją oraz numerem stanina, w którym mieści się wynik szkoły.

Lp.	L. prac	L. oddziałów	Lokalizacja	Woj.*	Nr stanina
1	89	4	wieś	P	3
2	59	3	wieś	L	2
3	64	3	wieś	M	8
4	74	3	do 20 tys.	L	4
5	35	2	do 20 tys.	M	6
6	121	5	od 20 do 100 tys.	P	7
7	112	4	od 20 do 100 tys.	M	4
8	234	8	powyżej 100 tys.	M	9

**Litery P, L, M oznaczają odpowiednio województwo podkarpackie, lubelskie, małopolskie.*

Ad I. Rozumienie pojęcia „powierzchnia dachu"

Analizując rozwiązania uczniowskie, zauważyłam, że wielu uczniów interpretuje powierzchnię dachu niezgodnie z rysunkiem i rzeczywistym wyglądem. Badając problem, jak rozumienie tego pojęcia wpłynęło na poziom wykonania zadania, wyróżniłam następujące sytuacje:

1. Poprawna interpretacja rysunków i zastosowanie poprawnej metody obliczenia powierzchni obydwu dachów.
2. Zastosowanie poprawnej metody obliczenia powierzchni dachu I oraz dodanie pól trójkątów do powierzchni dachu II.
3. Obliczenie pola powierzchni całkowitej jednej lub obydwu brył tworzących dach.
4. Poprawne obliczenie powierzchni tylko jednej połaci dachu w jednym lub obydwu domach.
5. Obliczenie objętości strychu lub domu.
6. Inne, błędne metody obliczenia powierzchni obydwu dachów.
7. Niepodjęte rozwiązanie.

Tabela 2. Wyniki analizy rozwiązań pod kątem sposobów rozwiązywania ipopełnionych błędów

Nr szkoły	L. ucz.	% ucz. w syt. 1.	% ucz. w syt. 2.	% ucz. w syt. 3.	% ucz. w syt. 4.	% ucz. w syt. 5.	% ucz. w syt. 6.	% ucz. w syt. 7.
1	89	9	13,5	7,9	7,9	2,2	39,3	20,2
2	59	6,8	6,8	5,1	3,3	10,2	40,7	27,1
3	64	18,8	12,5	15,6	6,3	7,8	25	14
4	74	5,4	12,2	17,6	2,7	6,7	25,7	29,7
5	35	20	14,3	8,6	8,6	2,8	25,7	20
6	121	11,6	19	23,1	5	7,4	20,7	13,2
7	112	9,8	11,6	14,3	6,3	9,8	19,6	28,6
8	234	38,7	31,5	13,2	2,1	2,9	8,8	3,8
Razem	**788**	**18,8**	**18,9**	**14**	**4,6**	**6,1**	**21,4**	**16,2**

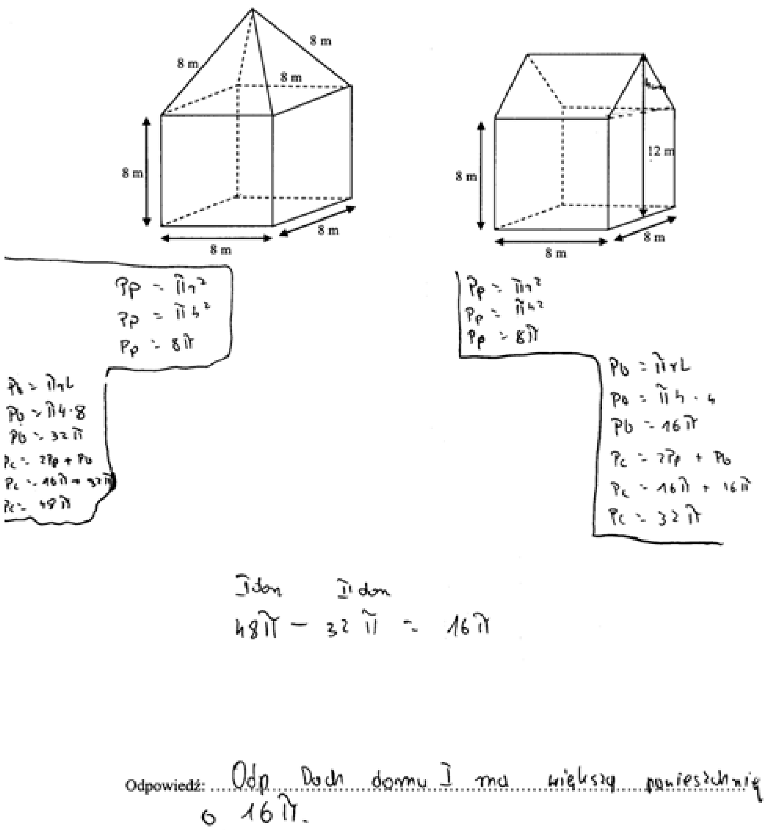
Ad II. Wpływ rozumienia pojęcia dachu na poziom wykonania zadania

Z zestawienia wynika, że istotny wpływ na poziom rozwiązania tego zadania miało zrozumienie zwrotu „powierzchnia dachu". Poprawnie zinterpretowało go dla obydwu domów niecałe 19% badanych uczniów. Prawie taki sam odsetek badanych zrobił to dobrze dla dachu I, jednocześnie zaliczając do powierzchni dachu II trójkąty. Porównywalną grupę stanowią uczniowie, którzy obliczyli powierzchnię całkowitą jednej lub obydwu brył stanowiących dach albo tylko jedną połać dachu w jednym lub obydwu domach. Zarówno w sytuacji drugiej, jak i trzeciej zawiera się etap, w którym uczeń obliczał coś więcej niż powierzchnię dachów. Tak postąpił co trzeci badany. Mimo iż wykazał się umiejętnościami matematycznymi badanymi tym zadaniem, to zgodnie z kryteriami oceniania tracił 2 lub 3 punkty. Szczególnie częstym przypadkiem było doliczanie do powierzchni dachu dwuspadowego części „trójkątnych", co świadczy o nie dość dokładnym analizowaniu przez uczniów rysunku. Można przypuszczać, że wyróżnienie dachu np. poprzez zacieniowanie jego powierzchni lub narysowanie pokrycia albo użycie sformułowania „dach dwuspadowy" wpłynęłoby na podniesienie wskaźnika rozwiązywalności tego zadania. Również sposób przyznawania punktu za ostatnie kryterium był niekorzystny dla uczniów, którzy obliczyli pola powierzchni całkowitych brył tworzących dachy i poprawnie porównali otrzymane wyniki. Niezaliczenie tego kryterium jest wynikiem błędnego widzenia dachu, a nie braku umiejętności rachunkowych. Reasumując, uczeń, który obliczył bezbłędnie i porównał powierzchnie całkowite brył tworzących dachy domów, tracił 3 z 5 możliwych do uzyskania za to zadanie punktów, czyli 60%. Z drugiej strony, biorąc pod uwagę aspekt praktyczny zadania, takie błędy w rozumieniu polecenia lub pojęcia mogą być bardzo kosztowne i w przyszłości narażać obecnych uczniów na straty finansowe.

Ad III. Na ile uczniowie kończący gimnazjum znają wzory, twierdzenia i własności trójkątów prostokątnych określone w podstawie programowej a niezbędne do rozwiązywania zadań praktycznych?

Łącznie prawie 44% uczniów liczyło inne wielkości niż powierzchnia przynajmniej jednej ściany dachu albo nie podejmowało rozwiązania. Wśród niepoprawnych rozwiązań pojawiają się obliczenia: objętości budynków lub brył stanowiących dachy, sumy długości krawędzi brył stanowiących domy, tylko wysokości dachów. Zdarzało się, że uczeń stosował błędne wzory na pole powierzchni ostrosłupa czy graniastosłupa, np. wzory związane z bryłami obrotowymi albo liczył wielkość, która jest iloczynem pól powierzchni. Stosunkowo duży odsetek uczniów nie podjął próby rozwiązania tego zadania. Świadczy to o braku umiejętności powiązania posiadanego zasobu wiedzy z sytuacją przedstawioną w zadaniu albo o tym, że takiej wiedzy nie nabył w trakcie edukacji szkolnej co piąty gimnazjalista poddany badaniom. Przykłady rozwiązań zamieszczone poniżej ujawniają słabe punkty nauczania matematyki w gimnazjum.

Zapisane wzory i przedstawione obliczenia pokazują, że uczeń nie widzi różnicy w kształcie dachów i stosuje taką samą procedurę do obliczenia pól ich powierzchni. Pojawiają się wzory związane ze stożkiem, ale trudno wyjaśnić, dlaczego do pola powierzchni bocznej doliczone są pola dwóch kół. Przedstawiony zapis można uznać za „zlepek" wzorów na pole powierzchni walca i stożka, co świadczyłoby o nieznajomości wzorów albo o tym, że wiadomości nie są dostatecznie utrwalone. Dodatkowo, obliczając pole koła, uczeń błędnie podnosi liczbę do kwadratu.

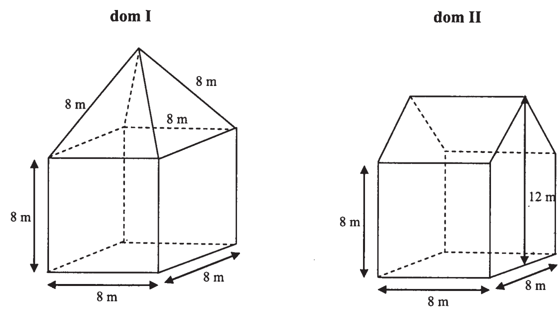


Uczeń poprawnie widzi części, z których składa się dach I, ale nie radzi sobie z obliczeniem jego powierzchni, o czym świadczy obliczenie obwodu czterech ścian. Podobny sposób stosuje do obliczenia powierzchni dachu II, błędnie uznając, że jedna z krawędzi dachu ma długość 4 cm. Prowadzone w centymetrach obliczenia oraz odpowiedź w jednostkach liniowych wskazują na brak umiejętności odróżniania jednostek i posługiwania się nimi.

Szczegółowa analiza rozwiązań zadania, a zwłaszcza tych, które zaliczyłam do sytuacji 5., 6. i 7. nasunęła następujące refleksje nad zasobem wiedzy i umiejętnościami uczniów kończących gimnazjum:

- prawie 44% badanych ma problem z rozróżnieniem pojęć: pole, objętość, długość;
- znajomość wzorów na pola figur płaskich oraz umiejętność obliczania pól powierzchni brył jest niezadowalająca;
- uczniowie nie potrafią wykorzystywać zależności w trójkątach prostokątnych do obliczenia długości odcinków;
- znaczny odsetek uczniów ma problemy z interpretacją treści zadania i rysunku, w związku z czym nie podejmuje próby rozwiązania zadania;

- uczniowie nie radzą sobie z rachunkami i to niejednokrotnie na liczbach całkowitych;
- porównywanie wyników odbywa się zazwyczaj poprzez wykonywanie żmudnych obliczeń nawet w sytuacji, gdy wystarczy przyjrzeć się postaci liczb (np. aby wskazać większą z liczb $64\sqrt{3}$, $64\sqrt{2}$ uczniowie podstawiali przybliżone wartości $\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2}$, wykonywali mnożenie i porównywali wyniki, popełniając błędy rachunkowe);
- problemem dla gimnazjalistów jest operowanie jednostkami wielkości powszechnie używanych;
- zapisy kolejnych etapów rozwiązania są chaotyczne i mało czytelne;
- uczniowie nie zauważają sprzeczności między uzyskanym wynikiem a ich wiedzą o świecie; ocena realności uzyskanych wyników jest często pomijana;
- sprawność w używaniu aparatu matematycznego do rozstrzygania kwestii praktycznych wymaga doskonalenia.



dom I

dach

8cm + 8cm + 8cm = 24cm - jedna płyta dachowa

4 płyty = 24 + 24 + 24 + 24 = 98 cm

dom II

h = 12cm

32cm + 16cm = 48cm

12 cm - 8 cm = 4 cm

84

8 cm + 8cm + 8cm + 8cm + 4cm + 4cm + 4cm + 4cm = 48 cm

8 cm + 16 cm = 24cm jedna płyta

4 płyty = 48 cm + 24 cm = 72cm

Odpowiedź: dach w domu pierwszym ma większą powierzchnię.

Ad IV. Co wpłynęło na zróżnicowanie wyników w szkołach oraz oddziałach danej szkoły?

Tabela 3. Poziom wykonania zadania 34. w klasach i szkole (w procentach)

Nr szk.	Poziom wykonania zadania – w oddziałach								Poziom wykonania zadania – w szkole	Poziom wyk. zadań IV obszaru	Poziom wyk. testu
1	11	9	24	13					14	26	44
2	5	14	0						7	21	38
3	27	27	30						28	44	63
4	13	18	16						16	31	48
5	24	36							30	42	54
6	13	35	16	58	29				30	44	61
7	15	10	5	12					11	27	48
8	86	54	28	32	63	69	23	43	51	63	78
									23,375		

Poziom wykonania zadania jest bardzo zróżnicowany, a różnice jego rozwiązywalności w badanych szkołach są wyższe od różnic w poziomie wykonania całego testu. Z zestawienia wynika, że wykonalność zadania jest najwyższa w szkole wielkomiejskiej. Uczniowie tej szkoły częściej niż innych podejmowali próby rozwiązania zadania, w związku z czym zwiększali swoje szanse na uzyskanie punktów. Szkoły wiejskie osiągnęły poziom niższy niż szkoły z miast, w pracach uczniów z tych szkół częściej miejsce na rozwiązanie tego zadania pozostawało puste. Odsetek uczniów, którzy wykazywali się nieznajomością wzorów i interpretacją pojęcia pola powierzchni jest tym większy, im mniejsza miejscowość, w której zlokalizowana jest szkoła.

Znacznie większe zróżnicowanie wyników ma miejsce w oddziałach szkół. Dotyczy to głównie szkół nr 6 i 8 zlokalizowanych w dużych miastach. Niewątpliwie na taki rozrzut miał wpływ sposób rekrutacji, rodzaj klasy oraz liczba laureatów konkursów przedmiotowych, którzy uzyskują 100% punktów za egzamin. Z przeprowadzonej wśród dyrektorów badanych szkół ankiety wynika, że w jednej z nich (nr 6) rekrutacja do dwóch klas odbywała się na podstawie wyników ze sprawdzianu i ocen na świadectwie oraz zgodnie z predyspozycjami sportowymi. Również w jednej szkole nabór do niektórych klas odbył się na podstawie „konkursu świadectw" oraz wyników sprawdzianu po szkole podstawowej. Dotyczy to szkoły z dużego miasta (nr 8), która prowadzi oddziały z fakultetami matematycznym, polonistycznym, języka angielskiego oraz klasę o profilu języka niemieckiego. W pozostałych szkołach podczas przydziału do poszczególnych klas zachowywana była proporcja między liczbą uczniów z wynikami wysokimi, średnimi i niskimi oraz porównywalna liczba chłopców i dziewcząt. W szkołach wiejskich i w małych miastach czynnikiem wpływającym była również lokalizacja szkoły podstawowej, z której wywodzili się uczniowie. W dwóch szkołach uczył we wszystkich oddziałach ten sam nauczyciel, w kolejnych dwóch klasy trzecie uczyło dwoje nauczycieli, w trzech troje i w jednej czworo. Łącznie w rozpatrywanych szkołach klasy trzecie były prowadzone przez 19. nauczycieli. Trudno określić wpływ uczących matematyki na wyniki w oddziałach, gdyż różnice w wynikach klas dla jednego nauczyciela wynoszą od dwóch do ponad 30 punktów procentowych. Trudno też mówić o odpowiedzialności tylko nauczyciela uczącego w ostatniej klasie gimnazjum, nie uwzględniając całego okresu kształcenia. Niemniej trzeba przyznać, że szkoły robią wszystko, aby przygotować dobrze swoich uczniów do egzaminu. W dwóch z badanych szkół w klasach trzecich realizowana była dodatkowa, obowiązkowa dla wszystkich lekcja matematyki z puli godzin do dyspozycji dyrektora, w jednej taka godzina była prowadzona charytatywnie, a w każdej z pozostałych nauczyciele społecznie prowadzili kółka, zajęcia wyrównawcze, konsultacje dla chętnych. Zainteresowanie uczniów taką formą powtórzenia, uzupełnienia i utrwalenia wiadomości było mniejsze od oczekiwanego przez nauczycieli. Dlatego wyniki ogólne zarówno klas, jak i szkół nie były dla pedagogów zaskoczeniem. Dyrektorzy w ankietach twierdzili, że są porównywalne i spójne z ocenami klasyfikacji końcoworocznej.

Ad V. Czy poziom wykonania tego zadania w klasach odbiega od poziomu wykonania innych zadań sprawdzających umiejętności z IV obszaru standardów wymagań egzaminacyjnych arkusza?

Niewątpliwie to zadanie wpłynęło na obniżenie rezultatów zarówno w obszarze IV standardów wymagań egzaminacyjnych, jak i na ogólny średni wynik szkół. Maksymalna różnica w poziomie wykonania tego zadania w badanych szkołach wynosi 44 punkty procentowe i jest wyższa o 4 punkty od różnicy wykonania całego testu. W sześciu spośród ośmiu badanych szkół rozwiązywalność tego zadania była najniższa, w dwóch szkołach nieznacznie niższy poziom wykonania miało zadanie 35, które badało umiejętności z III obszaru standardów wymagań egzaminacyjnych. Przedstawiona analiza dowodzi, że uczniowie na poziomie poniżej koniecznego wykonują zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi dotyczące rozwiązywania problemów.

Szukanie sposobów poprawy wyników w tej dziedzinie jest zadaniem, które stawiają sobie nauczyciele matematyki licznych szkół gimnazjalnych w Polsce. Wynika to z faktu, że sprawność w posługiwaniu się narzędziami matematycznymi jest potrzebna nie tylko w dalszej edukacji. Jest to warunek niezbędny do aktywnego, skutecznego i twórczego rozwiązywania autentycznych problemów, z którymi przyjdzie zmierzyć się dzisiejszym gimnazjalistom jako ludziom dorosłym. Jest to umiejętność bardzo istotna w wielu sytuacjach w szkole i poza nią, gdyż gotowość rozwiązywania problemów daje ludziom pewność siebie w radzeniu sobie z nowymi sytuacjami. Trudność nabywania tej umiejętności tkwi w tym, że rozwiązywanie problemów zawiera element niepewności, czy problem uda się rozwiązać, a ryzyko porażki jest większe niż w przypadku innych zadań. Dlatego też istotną sprawą jest stwarzanie warunków, w których uczeń doświadczać będzie twórczego rozwiązywania problemów. Niewątpliwie taką sytuacją na lekcji matematyki są zadania-problemy otwarte, zadania-niespodzianki, zadania o kilku rozwiązaniach. Również stawianie ucznia w sytuacjach konfliktowych, w których zawodzą przyswojone schematy i musi dokonać ich adaptacji do nowych warunków lub wypracować nowe. Dają one możliwość dyskusji, wymiany myśli, doświadczania różnych strategii i metod rozwiązania, co z pewnością przyczynia się do rozwoju innych, ważnych w życiu umiejętności.

Refleksje

Kształtowanie rozumienia pojęć matematycznych jest procesem ciągłym i powinno być oparte na różnych typach ćwiczeń, podczas których uczniowie stopniowo przechodzą od czynności konkretnych poprzez wyobrażone do abstrakcyjnych.

Umiejętność stosowania matematyki w różnych sytuacjach praktycznych wymaga ciągłego doskonalenia poprzez odpowiedni dobór zadań z częstym odniesieniem do sytuacji realnych.

Wdrażanie do powiązania posiadanego zasobu wiedzy z nową sytuacją zadaniową pomaga w efektywnym uczeniu się matematyki.

Na lekcjach uczniowie powinni mieć jak najczęściej okazję do zmierzenia się z zadaniami dającymi sposobność twórczego myślenia, czyli wyjścia poza stereotypowe rozwiązania i wytworzenia pomysłów zaskakujących, niecodziennych, nieschematycznych. Takie podejście do nauczania pozwoli rozwinąć ich zdolności, nauczy wykorzystywania wiadomości i umiejętności w różnych sytuacjach, również podczas egzaminu.

Umiejętność uważnego czytania tekstu zadań, ostrożność w interpretacji, uświadamianie wagi i roli każdego słowa, symbolu jest istotnym elementem wpływającym na rozwiązywalność zadań. Dlatego wdrażanie uczniów do analizowania treści zadań z uwzględnieniem tych elementów jest bardzo ważne.

Przyzwyczajanie uczniów do sprawdzania realności otrzymanych wyników przed udzieleniem odpowiedzi zmusza do spojrzenia na całe rozwiązanie jeszcze raz i zweryfikowania toku myślenia oraz poprawności rachunkowej.

Wypracowanie nawyku tworzenia planu rozwiązania oraz techniki zapisu rozwiązania zadania ma wpływ na sposób prezentacji toku rozumowania, dzięki czemu może przyczynić się do poprawy wyników egzaminacyjnych.