

**Karolina Kołodziej, Urszula Mazur,
Elżbieta Tyralska-Wojtycza**

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie

Matematyka w nowym egzaminie gimnazjalnym w kontekście minionych 10 lat doświadczeń

W komunikacji międzyludzkiej kontekst oznacza część tekstu potrzebną do właściwego zrozumienia jakiegoś stwierdzenia czy zdarzenia, jest to także szeroko rozumiana sytuacja, w której doszło do tego zdarzenia. W takim właśnie duchu chcielibyśmy przedstawić nasze refleksje na temat matematyki w egzaminie gimnazjalnym.

Poniżej zamieszczono kilka pytań, na które będziemy szukać odpowiedzi w niniejszym opracowaniu po to, by rozważyć, na czym polega ewaluacja egzaminu gimnazjalnego w zakresie matematyki, czego spodziewać się w nowej sytuacji egzaminacyjnej, zakładając, że wprowadzone zmiany służą rozwojowi tego egzaminu. W związku z tym kontekst dotychczasowego egzaminu jest tu traktowany jako kanwa rozważań na ten temat.

W części matematyczno-przyrodniczej egzaminu gimnazjalnego przeprowadzonego w latach 2002 – 2011 zawsze przeważały zadania z matematyki. Wynika to przede wszystkim z ramowych planów nauczania ustalanych przez MEN. Także niektóre standardy wymagań egzaminacyjnych w znacznym stopniu odnosiły się do matematyki, choć oczywiście można było nimi sprawdzać pewne umiejętności także z pozostałych przedmiotów objętych tą częścią egzaminu.

Jakie typy zadań stosowano do sprawdzenia umiejętności i wiadomości matematycznych w egzaminie gimnazjalnym w latach 2002 - 2011?

W dziesięciu arkuszach części matematyczno-przyrodniczej egzaminu gimnazjalnego matematyka została zastosowana łącznie w 81 jednopunktowych zadaniach zamkniętych wielokrotnego wyboru (ZZ WW) oraz w 46 wielopunktowych zadaniach otwartych (ZO) zarówno krótkiej odpowiedzi (KO, 21 zadań), jak i rozszerzonej odpowiedzi (RO, 25 zadań). W tabeli 1. przedstawiono informacje na temat udziału zadań o treściach matematycznych w gimnazjalnych arkuszach egzaminacyjnych. Za zadania zamknięte można było uzyskać 16,2% ogólnej liczby punktów z tej części egzaminu, a za zadania otwarte 27,6%. Jeśli przyjrzyć się proporcjom w obrębie samej matematyki, to punkty za zadania ZZ WW stanowią 37% z ogólnej liczby punktów tego przedmiotu, a zadania otwarte – 63%, w tym ZO RO 43,8%. Tak więc każdego roku zdający mieli możliwość zmierzyć się z zadaniami otwartymi, które w obrębie tylko samej matematyki zapewniały uzyskanie prawie 2/3 możliwych do uzyskania punktów, a w grupie pięciu przedmiotów egzaminacyjnych – ponad 1/4 punktów. Dodatkowo warto w tych rozważaniach uwzględnić także pozostałe przedmioty przyrodnicze, w których matematyka była narzędziem do rozwiązywania zadań z fizyki, chemii

czy geografii. Łącznie za te zadania uczniowie mogli uzyskać 45 punktów, 16 za ZZ WW, a 29 za ZO, w tym 19 za ZO RO.

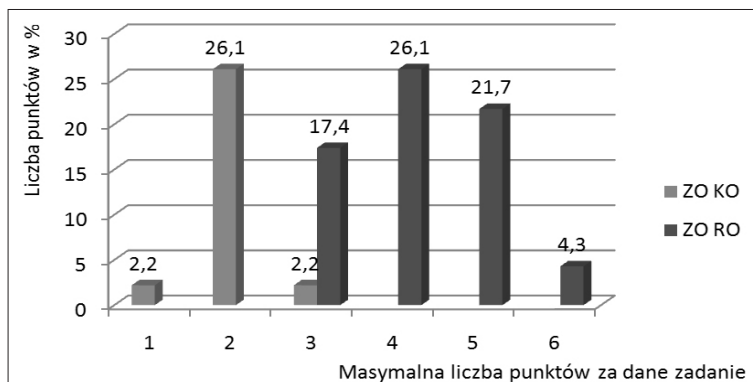
Tabela 1. Zadania o treściach matematycznych w gimnazjalnych arkuszach egzaminacyjnych w latach 2002 – 2011

Wyszczególnienie	Liczba pkt za ZZ WW	% udział pkt za ZZ WW ogółem	Liczba pkt za ZO	% udział pkt za ZO ogółem	% udział pkt za ZZ WW w ogólnej liczbie pkt z matematyki	% udział pkt za ZO w ogólnej liczbie pkt z matematyki
Matematyka*	81	16,2	138	27,6	37,0	63,0
Przedmioty przyrodnicze**	16	35,6	29	64,4		

* za 100% przyjęto 500 punktów możliwych do uzyskania w 10 latach egzaminu gimnazjalnego;

** za 100% przyjęto 45 punktów możliwych do uzyskania w 10 latach egzaminu gimnazjalnego, w których matematyka była narzędziem do rozwiązania tych zadań.

Dodatkowo warto zastanowić się, co konkretnie rozumiemy pod pojęciem zadania otwartego w części matematyczno-przyrodniczej egzaminu gimnazjalnego. Graficznie przedstawiono to na rycinie 1. W dziesięciu edycjach tegoż egzaminu sporadycznie stosowano zadania 1-punktowe (3 zadania) i 6-punktowe (1 zadanie). W grupie ZO KO najczęściej stosowano zadania 2-punktowe. Za ich rozwiązanie można było uzyskać 26,1% punktów możliwych do zdobycia w grupie zadań o treściach matematycznych. Wśród ZO RO dominowały zadania 3-punktowe, stanowiły one ponad ¼ punktów możliwych do uzyskania za matematyczne ZO (26,1%). Nieco rzadziej stosowano zadania 5-punktowe – częściej niż co piąty punkt z matematyki należał do tych właśnie zadań (21,7%). W jeszcze mniejszym stopniu sprawdzano wiadomości i umiejętności matematyczne zadaniami 2-punktowymi, stanowią one 17,4% punktów w grupie zadań matematycznych.

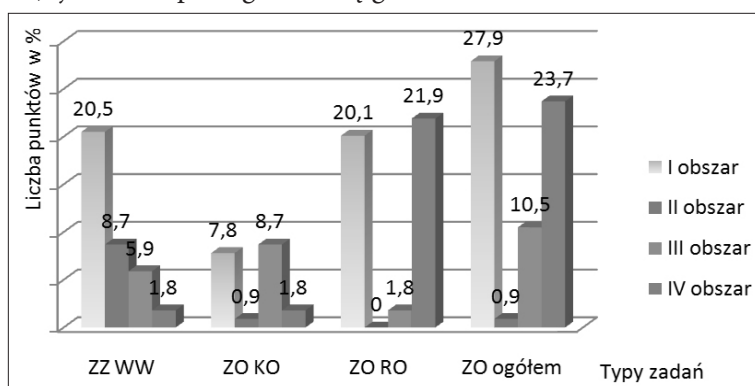


Rycina 1. Zadania otwarte o treściach matematycznych w gimnazjalnych arkuszach egzaminacyjnych ze względu na liczbę punktów możliwych do uzyskania za wykonanie danego zadania w latach 2002 – 2011

Mając na uwadze przytoczone informacje, warto zastanowić się, jak może wyglądać nowy egzamin gimnazjalny z matematyki w kontekście dotychczasowych doświadczeń. W którym kierunku mogą ewaluować zadania otwarte? Jeśli przyjąć założenie, że liczba punktów możliwych do uzyskania za rozwiązanie danego zdania otwartego odzwierciedla złożoność tego zadania, a także uwzględnić czas egzaminu gimnazjalnego z zakresu matematyki i wiek piszących, można przypuszczać, że w grupie zadań otwartych będą dominowały zadania rozszerzonej odpowiedzi, o ile w ogóle nie zostaną zastosowane wyłącznie ZO RO. Bo właśnie one dają zdającym największą możliwość prezentowania własnego toku rozumowania.

Jakie umiejętności i wiadomości matematyczne sprawdzano głównie w minionych 10 latach egzaminu gimnazjalnego i jak radzili sobie z nimi zdający podczas egzaminów gimnazjalnych?

Jeśli z kolei dokonać analizy wiadomości i umiejętności sprawdzanych podczas egzaminu, wyrażonych obszarami standardów wymagań egzaminacyjnych (rycina 2.), to zauważymy, że *stosowanie zintegrowanej wiedzy i umiejętności do rozwiązywania problemów* (IV obszar standardów) sprawdzane było głównie przy pomocy ZO RO (21,9% punktów). Sprawdzeniu wymagań z obszaru I – *umiejętności stosowania terminów, pojęć i procedur z zakresu przedmiotów matematyczno-przyrodniczych niezbędnych w praktyce życiowej i dalszym kształceniu* w zasadzie w równym stopniu służyły ZO RO (20,1% punktów), jak i ZZ WW (20,5% punktów). ZO KO najczęściej stosowano do sprawdzenia wiedzy i umiejętności ze wspomnianego wyżej obszaru I oraz III, tj. *wskazywanie i opisywanie faktów, związków i zależności w szczególności przyczynowo-skutkowych, funkcjonalnych, przestrzennych i czasowych*. Za rozwiązanie zadań z tych obszarów zdający mogli uzyskać odpowiednio 7,8% i 8,1% punktów z zakresu matematyki. W podobnym stopniu sprawdzane były też umiejętności z II obszaru standardów – *wyszukiwanie i stosowanie informacji* (8,7% punktów), jednak tu posługiwano się głównie ZZ WW.



Rycina 2. Zadania o treściach matematycznych w gimnazjalnych arkuszach egzaminacyjnych według obszarów standardów wymagań egzaminacyjnych w latach 2002 – 2011

Na podstawie powyższych analiz można stwierdzić, że dotychczasowe arkusze egzaminacyjne były mocno nasycone treściami matematycznymi (219 p. z matematyki na 500 możliwych do uzyskania). Fakt wydzielenia matematyki w osobny zakres egzaminu nie powinien budzić niepokoju o to, że jego nowa jakość spowoduje niższe wyniki egzaminu z tego przedmiotu. Można bowiem założyć, że najbliższe populacje nie różnią się zasadniczo od dotychczasowych, a w szkołach w dużym stopniu są ci sami nauczyciele, którzy potrafią tak pracować z uczniami, by wydobycь wszystko, co najlepsze.

Istotna jest także rozwiązywalność zadań. Niezależnie od roku egzaminu w części matematyczno-przyrodniczej – poza jednym zadaniem – poziom wykonania ZO RO mieścił się w granicach 20–49%. Oznacza to, że dla każdego rocznika zdających zadania matematyczne były trudne. Podobnie ma się rzecz z ZO KO. W tej grupie, poza trzema wyjątkami, wszystkie ZO KO, niezależnie od roku egzaminu, charakteryzowały się tym samym wskaźnikiem rozwiązania co ZO RO. Oprócz wspomnianych pięciu ZO (jednego RO i czterech KO) wszystkie pozostałe zadania, w każdym roku egzaminu, które były rozwiązywane na poziomie 50% i więcej, należały do ZZ WW.

Mając na uwadze nową formułę egzaminu gimnazjalnego z zakresu matematyki, być może powinno to stanowić sygnał, że mocniejszy niż dotychczas akcent należy położyć na ćwiczenie umiejętności radzenia sobie z zadaniami otwartymi, zwłaszcza rozszerzonej odpowiedzi, gdyż one wydają się być istotą postępu w zmienionej formule tegoż egzaminu. Z kolei zastosowane w egzaminach gimnazjalnych zadania krótkiej odpowiedzi może mogłyby być podstawą do podjęcia prac nad zróżnicowanymi formami zadań zamkniętych.

Czego oczekuje się od ucznia na nowym egzaminie gimnazjalnym z matematyki?

W *Informatorze o egzaminie gimnazjalnym* znajdziemy zapowiedzi na temat nowego egzaminu gimnazjalnego z matematyki wyrażone w kontekście dotychczasowych wymagań egzaminacyjnych. Pozwala to porównać stopień i kierunek zapowiadanych zmian. Schematycznie przedstawiono to na rycinie 3.

Takie zapisy pozywają nam przypuszczać, że podczas egzaminu gimnazjalnego z matematyki w mniejszym stopniu sprawdzane będą te umiejętności i wiadomości, które zawierały się głównie w I obszarze standardów wymagań egzaminacyjnych (*Umiejętne stosowanie terminów, pojęć i procedur z zakresu przedmiotów matematyczno-przyrodniczych...*). Częściej natomiast zdającym przyjdzie się zmierzyć z zadaniami, w których algorytmy te będą narzędziem do udowodnienia, że rozumieją pojęcia matematyczne, umieją zastosować je w różnych sytuacjach, planując przy tym swoje działanie, w tym także w sytuacjach nietypowych, i prezentując je. W większym stopniu będzie sprawdzana wiedza typu „wiedzieć, jak” i „wiedzieć, dlaczego” niż wiedza „wiedzieć, ile”, czyli zostanie położony duży nacisk na operatywność.

W PORÓWNANIU Z DOTYCHCZASOWYM EGZAMINEM



Rycina 3. Syntetyczna prezentacja założeń nowego egzaminu gimnazjalnego z matematyki

A zatem rozwój egzaminu w zakresie matematyki ukierunkowany jest na umiejętności, które dotychczas zawierały się głównie w wymaganiach określonych w III (*Wskazywanie i opisywanie faktów, związków i zależności...*) i IV (*Stosowanie zintegrowanej wiedzy i umiejętności do rozwiązywania problemów*) obszarze standardów wymagań egzaminacyjnych. Widać ewaluacja dziesięciu lat funkcjonowania tego egzaminu wykazała, że dla współczesnego młodego człowieka niezmiernie istotna jest właśnie ta grupa umiejętności. Pomocna w tej analizie będzie tabela 2.

Tabela 2. Cele kształcenia – wymagania ogólne z matematyki zapisane w podstawie programowej dla III etapu edukacyjnego z 2008 roku, a standardy wymagań egzaminacyjnych obowiązujące w latach 2002 - 2011¹

Cele kształcenia – wymagania ogólne	Standardy wymagań egzaminacyjnych			
	I	II	III	IV
<p>I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.</p> <p>Uczeń interpretuje i tworzy teksty o charakterze matematycznym, używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.</p>	stosuje terminy i pojęcia matematyczno-przyrodnicze	operuje informacją	posługuje się językiem symboli i wyrażeń algebraicznych; posługuje się funkcjami	
<p>II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.</p> <p>Uczeń używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretuje pojęcia matematyczne i operuje obiektami matematycznymi.</p>	wykonuje obliczenia w różnych sytuacjach praktycznych; posługuje się własnościami figur		posługuje się językiem symboli i wyrażeń algebraicznych; posługuje się funkcjami	
<p>III. Modelowanie matematyczne.</p> <p>Uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji, buduje model matematyczny danej sytuacji.</p>	wykonuje obliczenia w różnych sytuacjach praktycznych; posługuje się własnościami figur	operuje informacją; przetwarza informacje	posługuje się językiem symboli i wyrażeń algebraicznych	analizuje sytuację problemową; tworzy modele sytuacji problemowej; tworzy i realizuje plan rozwiązania; opracowuje wyniki
<p>IV. Użycie i tworzenie strategii.</p> <p>Uczeń stosuje strategię jasno wynikającą z treści zadania, tworzy strategię rozwiązania problemu.</p>		operuje informacją; porównuje informacje		tworzy i realizuje plan rozwiązania; ocenia wyniki
<p>V. Rozumowanie i argumentacja.</p> <p>Uczeń prowadzi proste rozumowania, podaje argumenty uzasadniające poprawność rozumowania.</p>			posługuje się językiem symboli i wyrażeń algebraicznych	stosuje techniki twórczego rozwiązywania problemów; formuluje i sprawdza hipotezy, kojarzy różnorodne fakty... i wyciąga wnioski; analizuje sytuację problemową; opracowuje wyniki

¹ Standardy wymagań egzaminacyjnych. Załącznik do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 28 sierpnia 2007 r. (Dz.U. z dnia 31 sierpnia 2007 r. Nr 157, poz. 1102)

Co głównie sprawiało uczniom trudności w rozwiązywaniu zadań matematycznych?

Błędy popełniane przez gimnazjalistów podczas części matematyczno-przyrodniczej egzaminu gimnazjalnego można podzielić na dwa typy. Pierwszy odnosi się do działów matematyki, drugi – ogólny – dotyczy sposobów rozwiązania i sfery organizacji zapisu toku rozumowania. Poniżej przedstawiono czynności, które sprawiały uczniom najczęściej problemy.

W zakresie arytmetyki:

- wykonywanie działań na liczbach wymiernych,
- obliczenie, jakim procentem jednej liczby jest druga w kontekście praktycznym,
- zaokrąglanie liczb,
- W dziale algebra:
 - zapisywanie związków między danymi w postaci wyrażeń algebraicznych,
 - przekształcanie wzorów,
 - interpretowanie własności funkcji,
 - opisanie przedstawionej w zadaniu sytuacji za pomocą równania.
- Z zakresu geometrii:
 - stosowanie twierdzenia Pitagorasa (mylenie przeciwprostokątnej i przyprostokątnej),
 - obliczanie długości odcinka z zastosowaniem podobieństwa trójkątów
 - rozróżnianie wielkości w bryłach (podstawa, wysokość...),
 - mylenie pojęć i wzorów dotyczących pola i objętości, wysokości bryły i wysokości ściany, wysokości i boku...

Uwagi ogólne dotyczące rozwiązań zadań otwartych i organizacji zapisu toku rozumowania:

- brak spójności w redakcji zapisu przedstawianego toku rozumowania,
- niestaranny zapis działań, który pociąga za sobą błędy rachunkowe oraz uniemożliwia prawidłowe wykonanie następnych etapów rozwiązania,
- niepoprawny dobór algorytmu albo modelu matematycznego do sytuacji opisanej w zadaniu,
- nieuwzględnianie w rozwiązaniu wszystkich warunków określonych w treści zadania,
- brak umiejętności uogólniania i uzasadniania,
- nieumiejętne posługiwanie się jednostkami,
- brak interpretacji otrzymanych wyników oraz oceny ich sensowności,
- brak wprawy w stosowaniu wzorów, reguł i zasad w sytuacji praktycznej.

Na czym polega ewaluacja dotychczasowego egzaminu gimnazjalnego z matematyki, czyli – w czym upatrywać rozwoju?

Fakt, że na egzaminie gimnazjalnym będzie wydzielona część matematyczna i przyrodnicza, a wyniki będą komunikowane oddzielnie (podobnie jak przywrócenie obowiązku zdawania matematyki na egzaminie maturalnym) przypuszczalnie przyczyni się do podniesienia rangi przedmiotu *matematyka*. To z kolei wpłynie na intensyfikację nauczania matematyki i być może w przyszłości doprowadzi

do lepszych wyników z egzaminu gimnazjalnego w części matematycznej i wyższego poziomu zdawalności egzaminu maturalnego z tego przedmiotu.

Gimnazjum ma spełniać funkcję orientacyjną; na tym etapie następuje rozpoznawanie i rozwijanie zainteresowań i uzdolnień, co prowadzi do ukierunkowania uczniów na właściwe ścieżki dalszej edukacji. Wyodrębnienie wyniku egzaminu z matematyki będzie pomocne w procesie rekrutacyjnym do szkół ponadgimnazjalnych.

Podczas egzaminu gimnazjalnego w 2012 roku nowym elementem będzie *rozumowanie i argumentacja*. To wymaganie ogólne odnosi się do uczniów gimnazjum i szkół ponadgimnazjalnych i jest zgodne z zasadami dydaktyki matematyki.

Większa niż dotychczas różnorodność zastosowanych podczas egzaminu zadań umożliwi sprawdzenie sprawności matematycznych takich jak: schematyzowanie, dostrzeganie i wykorzystanie analogii, interpretowanie i racjonalne wykorzystanie definicji i twierdzeń, celowe używanie języka matematycznego, stosowania matematyki do rozwiązywania problemów z innych dziedzin. Nabycie tych umiejętności, a szczególnie posługiwanie się nimi, wymaga udoskonalania i modyfikowania zarówno treści nauczania, jak i metod oraz organizacji pracy. Sprawę treści rozwiązuje podstawa programowa, która określa zakresy do zrealizowania na każdym etapie edukacyjnym, natomiast organizacja pracy w trakcie lekcji i zastosowane metody to pole do działania nauczycieli. Ze względu na specyfikę matematyki, istotny jest dobór zadań, uwzględniający możliwość zastosowania różnych sposobów rozwiązania oraz użycia takich form zadań, które sprzyjają wdrażaniu uczniów do rozwiązywania różnorodnych problemów, zarówno teoretycznych, jak i praktycznych, do stosowania zdobytej wiedzy w praktyce. Zadań, które dostarczą okazji do dowodzenia i wnioskowania oraz wymagają nieschematycznego myślenia.

Inspiracji do układania takich zadań mogą dostarczyć arkusze zastosowane w poprzednich sesjach egzaminacyjnych. Poniżej podano przykład zadania krótkiej odpowiedzi i jego przekształcenia na zadanie zamknięte.

Zadanie 29. (0-2)/2007

W wiadrze jest x litrów wody, a w garnku y litrów wody. Ile litrów wody będzie w wiadrze, a ile w garnku, jeśli:

1. z wiadra przelejemy do garnka 1,5 litra wody;
2. przelejemy połowę wody z garnka do wiadra?

Wpisz do tabeli odpowiednie wyrażenia algebraiczne.

		Ilość wody (w litrach)	
		w wiadrze	w garnku
1.	Początkowo	x	y
	Po przelaniu z wiadra do garnka 1,5 litra wody.		
2.	Początkowo	x	y
	Po przelaniu połowy wody z garnka do wiadra.		

Zadanie

W wiadrze jest x litrów wody, a w garnku y litrów wody.

Przyporządkuj każdemu naczyniu wyrażenie algebraiczne opisujące ilość wody po dokonaniu wskazanego przelania, wpisując w odpowiednią komórkę literę A-H. Wybrane zaznaczenia przenieś na kartę odpowiedzi.

		Ilość wody (w litrach)			
		w wiadrze		w garnku	
1.	Początkowo	x		y	
	Po przelaniu z wiadra do garnka 1,5 litra wody.	1.1		1.2	
2.	Początkowo	x		y	
	Po przelaniu połowy wody z garnka do wiadra.	2.1		2.2	

A. $x + 1,5$

B. $x - 1,5$

C. $x - 1,5y$

D. $y + 1,5$

E. $0,5x + 0,5y$

F. $0,5y$

G. $x + 0,5y$

H. $0,5x$

Odpowiedzi: 1.1 B, 1.2 D, 2.1 G, 2.2 F