

Urszula Mazur

Szkoła Podstawowa nr 85 w Krakowie

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie

Twórczość uczniowska na egzaminie gimnazjalnym z zakresu matematyki

Czy egzamin gimnazjalny z matematyki może być miejscem twórczości uczniowskiej? Słowo *twórczość* jest terminem wieloznacznym, brak jest powszechnie przyjętej jego definicji. Z tego względu odpowiedź nie jest jednoznaczna i zależy będzie od przyjętej definicji. Jeśli słowo *twórczość* będziemy rozumieli tak jak prof. Wincenty Okoń (*Słownik pedagogiczny*, Warszawa 1992, s. 218), a mianowicie, że jest to „proces działania ludzkiego dający nowe i oryginalne wytwory oceniane w danym czasie jako społecznie wartościowe”, to odpowiedź będzie brzmiała – nie. Nie tylko dlatego, że problemy do rozwiązania są zdefiniowane i niemożliwe do modyfikacji, ale także dlatego, że poziom ich skomplikowania nie jest zbyt duży. Również z tego powodu, że wiadomości i umiejętności, jakimi posługują się uczniowie, nabyte są w szkole, podczas realizacji założeń podstawy programowej z matematyki i w związku z tym przewidywalne.

Można jednak na to zagadnienie popatrzeć inaczej, tak jak prof. Bogdan Suchodolski (*Pedagogika. Podręcznik dla kandydatów na nauczycieli*, Warszawa 1980, s. 535), że jest to „pewna postawa wobec życia mająca swój wyraz w umiejętności samodzielnego myślenia i rozwiązywania nieznanych problemów i zadań”. Wtedy odpowiedź na postawione pytanie może brzmieć – tak, jest możliwa. W niniejszym opracowaniu przedstawiono przykłady rozwiązań uczniowskich, które według autorki mają znamiona twórczych działań zdających.

W roku 2016, piątym egzaminie gimnazjalnym według nowej formuły i drugim ocenianym z wykorzystaniem aplikacji scoris, uczniowie mieli do rozwiązania z matematyki między innymi trzy zadania otwarte. Jednym z nich było cytowane poniżej zadanie.

Zadanie 22. (0–3)

Uczniowie klas trzecich pewnego gimnazjum pojechali na wycieczkę pociągiem. W każdym zajęтым przez nich przedziale było ośmioro uczniów. Jeśli w każdym przedziale byłoby sześcioro uczniów, to zajęliby oni o 3 przedziały więcej. Ilu uczniów pojechało na tę wycieczkę? Zapisz obliczenia.

Zasady oceniania tego zadania przygotowane w Centralnej Komisji Egzaminacyjnej przez koordynatorów wszystkich okręgowych komisji egzaminacyjnych przewidywały siedem sposobów jego rozwiązania. Sposoby te można podzielić na dwie główne grupy, rozwiązania algebraiczne i rozwiązania arytmetyczne, a wśród tych ostatnich graficzno-arytmetyczne. W pierwszej grupie wykorzystywano równania lub układy równań. Miały one różną postać, w zależności od przyjętych oznaczeń niewiadomych. Druga grupa rozwiązań

opierała się na wiadomościach i umiejętnościach zdobytych już w szkole podstawowej. Z danych OKE Kraków wynika, że uczniowie za rozwiązanie tego zadania uzyskali średnio 35% punktów możliwych do uzyskania. Niestety ponad 50% uczniów nie poradziło sobie z rozwiązaniem tego problemu. Natomiast około 30% gimnazjalistów uzyskało za to zadanie komplet punktów.

Poniżej przedstawiono przewidywane sposoby rozwiązania tego zadania.

I sposób

x – liczba ośmioosobowych przedziałów

$x + 3$ – liczba sześcioosobowych przedziałów

$8x$ – liczba uczniów w przedziałach ośmioosobowych

$6(x + 3)$ – liczba uczniów w przedziałach sześcioosobowych

$$8x = 6(x + 3)$$

$$x = 9$$

$$9 \cdot 8 = 72$$

II sposób

liczba uczniów, którzy pojechali na wycieczkę – x

liczba przedziałów ośmioosobowych – $x/8$

liczba przedziałów sześcioosobowych – $x/6$

$$x/6 + 3 = x/8$$

$$x = 72$$

III i IV sposób

x – liczba przedziałów ośmioosobowych zajętych przez uczniów

y – liczba uczniów

$$\begin{cases} 8x = y \\ 6(x + 3) = y \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} \frac{y}{8} = x \\ \frac{y}{6} = x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 72 \end{cases}$$

Sposoby te były powszechnie stosowane przez uczniów. W ich realizacji najczęściej pojawiającym się błędem było niepoprawne ustalenie zależności między ilością przedziałów sześcio- i ośmioosobowych. Wśród poprawnych rozwiązań pojawiły się oryginalne, prezentowane przez zdających, wskazujące właśnie na twórcze podejście do rozwiązania problemu.

Przykład 1.

x - liczba przedmiotów osmiodzwojowych
 y - liczba przedmiotów sześciuozwojowych

$$\begin{cases} 8x = 6y \\ x + 3 = y \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3 = y \\ x + 3 = 12 \\ x = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x - 6y = 0 \\ x - y = -3 \quad | \cdot (-8) \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9 \\ y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x - 6y = 0 \\ -8x + 8y = 24 \end{cases} \quad \begin{cases} 9 \cdot 8 = 72 \text{ osoby} \\ 12 \cdot 6 = 72 \text{ osoby} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2y = 24 \\ y = 12 \end{array}$$

Odp. Na tę wyprawę pojechało 72 uczniów

Przykład 2.

x - liczba przedmiotów 8-tygodniowych
 y - liczba przedmiotów 6-tygodniowych

$$8 \cdot x = 6 \cdot y \quad | : 6$$

$$x = \frac{3}{4}y$$

$$x = \frac{3}{4}y$$

lub $3 \cdot 12 = 36$ i $y = 12$

$$\begin{aligned} y &= 12 & x &= 9 \\ x &= \frac{3}{4} \cdot 12 & & \\ &= 9 & & \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} 9 \cdot 8 = 72 \\ 12 \cdot 6 = 72 \end{array}$$

Odp. Na wyprawę pojechało 72 uczniów.

Przykład 3.

x - ilość uczniów
 y - ilość przedmiotów

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 8 \mid \cdot y \\ \frac{x}{y+3} = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8y \\ \frac{8y}{y+3} = 6 \mid \cdot y+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8y \\ 8y = 6(y+3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8y \\ 8y = 6y + 18) - 6y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8y \\ 2y = 18 \mid : 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8y \\ y = 9 \end{cases}$$

$$x = 8 \cdot 9 \quad x = 72$$

$$8 \cdot 9 = 72$$

Spr.

$$\frac{72}{9} = 8$$

$$\frac{72}{9+3} = 6$$

Na tę wyliczenie
pojechało 72 uczniów.

Poniżej przedstawiono przewidywane arytmetyczno-graficzne sposoby rozwiązania zadania.

V sposób

$$\boxed{8} \dots \boxed{8}$$

$$\boxed{8} \boxed{8} \boxed{8} = \boxed{6} \boxed{6} \boxed{6} \boxed{6}$$

$$\boxed{6} \quad \boxed{6} \quad \boxed{6} \quad \boxed{6} \quad \boxed{6}$$

...

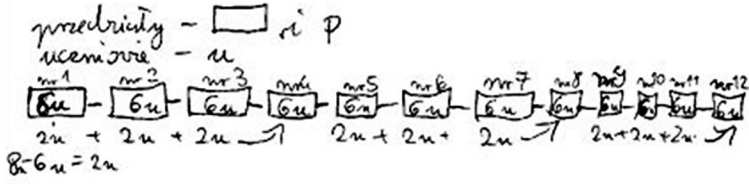
$$3 \cdot 6 = 183 \cdot 3 \cdot 8 = 72$$

$$18 : 2 = 9 \quad \text{lub}$$

$$9 \cdot 8 = 723 \cdot 4 \cdot 6 = 72$$

Najpopularniejszym sposobem arytmetycznym był sposób piąty, wersja pierwsza, ale również stosunkowo często pojawiła się wersja druga piątego sposobu. Oto przykłady takich realizacji:

Przykład 4.



$2 \cdot 2u + 2u = 6u$ 3 przedmioty = $18u$

$12p - 3p = 9p$

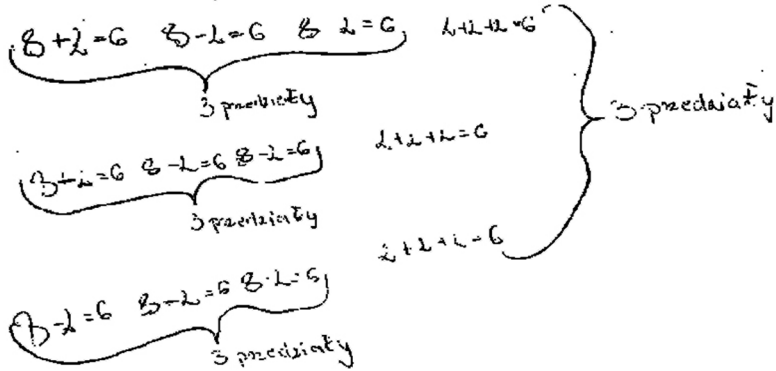
$3p = 18u$

9 przedmiotów po 8 uczniów

$9 \cdot 8u = 72u$

Odp.: Na tej wyjeździe pojechało 72 uczniów.

Przykład 5.



$3B + 3L + 3G = 12G$ [przedmiotów]

12 przedmiotów $\cdot 6$ uczniów = 72 uczniów

Odp. Na wyjeździe było 72 uczniów.

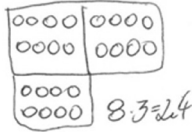
Przykład 6.



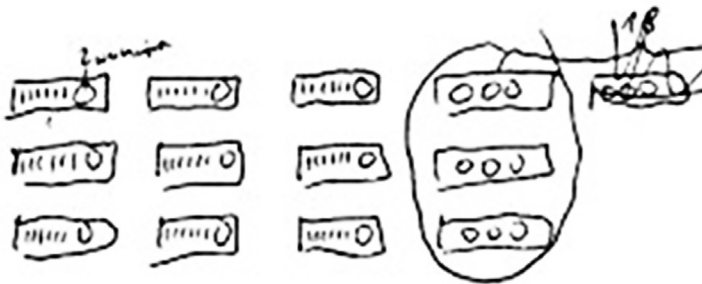
$$12 \cdot 6 = 72$$

Odp.: Na wyjeździe pojechało 72 uczniów

Przykład 7.



Przykład 8.



Odp.: Na tę wycieczkę pojechało 32 uczniów

Przykład 9.

Zajeli by o 3 przedmioty więcej
więc poczytawsza zajeli 9 przedmiotów
czyli było ich $8 \cdot 9 = 72$ osoby

Odp: Na wyprawkę pojechało 72 osoby

VI sposób

Liczba przedziałów ośmioosobowych	2	3	5	7	9	10
Liczba uczniów w tych przedziałach	16	24	40	56	72	80
Liczba przedziałów sześcioosobowych	5	6	8	10	12	13
Liczba uczniów w tych przedziałach	30	36	48	60	72	78

Przykład 10. jest realizacją tego sposobu przez ucznia.

Przykład 10.

$$\begin{array}{ll}
 20 \cdot 8 = 160 & 23 \cdot 6 = 138 \times \\
 15 \cdot 8 = 120 & 18 \cdot 6 = 108 \times \\
 10 \cdot 8 = 80 & 13 \cdot 6 = 78 \times \\
 \underline{9 \cdot 8 = 72} & \underline{12 \cdot 6 = 72 \checkmark}
 \end{array}$$

Odp. Na wyprawkę pojechało 72 uczniów.

VII sposób

Wspólne wielokrotności liczb 6 i 8: 24, 48, 72, 96, ...

Sprawdzamy, która z tych liczb spełnia warunki zadania.

Na przykład: $24 : 6 = 4$ i $24 : 8 = 3$; różnica $4 - 3 = 1$ $48 : 6 = 8$ i $48 : 8 = 6$; różnica $8 - 6 = 2$ $72 : 6 = 12$ i $72 : 8 = 9$; różnica $12 - 9 = 3$.

A oto inny sposób realizacji rozwiązania z wykorzystaniem wielokrotności liczb 6 i 8:

Przykład 11.

~~425~~

8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72

Odp. Na wyścigę pojechało ~~80~~ ~~88~~ ~~96~~ 72 uczniów

Przykład 12.

Praca wszystkich uczniów $\rightarrow x$
 przedkładały zajęte przez 8 uczniów $\rightarrow y$
 $\sim 11 \sim \sim 11 \sim \sim 11 \sim 6 \sim 11 \sim \rightarrow y + 3$

wyścig

8
16
24
32
40
48
56
64
72

6
12
18
24
30
36
42
48
54
60
66
72

wyścig

Na wyścigę pojechało 72 uczniów.

Zwykle przewidywane przez autorów zadań oraz koordynatorów rozwiązania zamieszczone w zasadach oceniania wyczerpują pomysły uczniów dotyczące sposobów/pomysłów podejścia do problemu przedstawionego w zadaniach. Są jednak takie zadania, które pobudzają uczniów do prezentowania rozwiązań innych niż typowe lub przewidywane. Tak też właśnie stało się w tym roku. Nawet jeśli uczniowie rozwiązywali sposobami algebraicznymi, to postać układów równań, rzadziej równania, była inna od oczekiwanej czy też przewidywanej. Takie przykłady rozwiązań przedstawiono w przykładach 1.– 3.

Większą pomysłowość wykazywali uczniowie, rozwiązując zadanie sposobami graficzno-arytmetycznymi. To właśnie w tej grupie rozwiązań pojawiły się sposoby, które nie zostały przewidziane przez ekspertów. Oto one:

Przykład 13.

8 w każdym przedziale

$$8 - 6 = 2$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

$$6 - 6 = 0$$

$$0 \cdot 3 = 0$$

$$0 - 6 = -6$$

$$-6 \cdot 3 = -18$$

$$-18 - 6 = -24$$

$$-24 \cdot 3 = -72$$

72 uczniów pojechało

Przykład 14.

$$8 \cdot 3 = 24$$

$$24 : 2 = 12$$

$$12 \cdot 6 = 72$$

pojechało 72 uczniów.

Przykład 15.

$$8 : 2 = 4$$

$$3 \cdot 6 = 18$$

$$4 \cdot 18 = 72$$

Na wydziałek pojechało 72 uczniów

Podczas oceniania pojawia się sytuacja, kiedy trzeba do nowego, prezentowanego przez ucznia, sposobu ustalić poziomy jego rozwiązania. Jest to również moment dużej odpowiedzialności egzaminatorów, aby takiego rozwiązania nie przeoczyć. Jak się okazuje, uczniowie – wbrew obiegowym opiniom – nie są przygotowani tylko do egzaminu. Są wyposażeni w wiedzę i umiejętności, które pozwalają im w sytuacjach nowych, nietypowych rozwiązywać problemy. Uczniowie ci, nawet jeśli na którymś etapie popełniają błędy, nie boją się podejmować prób rozwiązywania zadania. Zapisy uczniowskie świadczą o tym, że czasem jest tych prób kilka, zanim trafią na właściwe, satysfakcjonujące ich rozwiązanie.

W przeanalizowanej grupie prac liczba rozwiązań wykraczających poza ustalone warianty była niewielka. Świadczy to o tym, że zasady oceniania przygotowane były precyzyjnie, ale również o tym, że na egzaminie jest miejsce na twórcze działania zdających, a egzaminatorzy są przygotowani na ich rozpoznanie. Przytoczone na wstępie zadanie pozwalało gimnazjalistom na swobodne, zgodne z posiadanymi umiejętnościami wykorzystanie danych celem jego rozwiązania.