Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA
Centralny Zespół Ekspertów Matematycznych (CZEM)

O SCHEMATACH OCENIANIA ZADAŃ OTWARTYCH PRÓBNEJ MATURY Z MATEMATYKI

przeprowadzonej 3 listopada 2009 r.

Projekt, w ramach którego opracowano zasady oceniania zadań otwartych, schematy oceniania i przeprowadzono ocenianie prac egzaminacyjnych był współfinansowany z projektu Unii Europejskiej „Kapitał Ludzki”, projekt 4.2 „Pilotaż nowych egzaminów maturalnych i eksternistycznych”.

1. Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Dotychczas stosowany system oceniania zadań maturalnych (były to wyłącznie zadania otwarte) polegał na wyróżnieniu w rozwiązaniu oddzielnych czynności, które miały być wykonane przez zdającego i przyznawaniu punktów za wykonanie każdej czynności oddzielnie. Ogólna zasada oceniania zadań otwartych począwszy od matury 2010 roku jest nieco inna. Przyjęty system, nazwany **systemem holistycznym**, polega na spojrzeniu całościowym na rozwiązanie. Każdy nauczyciel matematyki, oceniając rozwiązanie zadania, potrafi odpowiedzieć na pytanie, czy zadanie zostało w istocie rozwiązane przez ucznia. Ta myśl stała się kluczowa dla nowego sposobu oceniania. Polega on z grubsza na tym, że ocena zależy przede wszystkim od tego, **jak daleko** zdający doprowadził swoje rozwiązanie.

Zadania otwarte znajdujące się w arkuszu maturalnym dzielimy na dwie grupy: zadania krótkiej odpowiedzi (za 2 punkty) i zadania rozszerzonej odpowiedzi (od 4 do 6 punktów). W zadaniach krótkiej odpowiedzi zdający otrzymuje 1 punkt za rozwiązanie, którego nie doprowadził do końca lub w którym popełnił pewne błędy; określone jest jednak pewne minimum, które w tym rozwiązaniu musi być dokonane, by ten jeden punkt przyznać. W rozwiązaniach zadań rozszerzonej odpowiedzi zostaje wyróżniona najważniejsza faza, nazywana **pokonaniem zasadniczych trudności zadania**. Przyjęto zasadę, że za pokonanie zasadniczych trudności zadania przyznaje się co najmniej połowę punktów, jakie zdający otrzymałby za bezbłędne rozwiązanie tego zadania. Tak więc w zadaniu za 4 punkty, za pokonanie zasadniczych trudności przyznajemy 2 lub 3 punkty (zależnie od zadania). W zadaniu za 5 punktów za pokonanie zasadniczych trudności zadania na ogół przyznajemy 3 punkty. W zadaniach za 6 punktów – na ogół 3 lub 4 punkty.

Wyróżnienie w rozwiązaniu zadania rozszerzonej odpowiedzi fazy pokonania zasadniczych trudności zadania powoduje następnie wyróżnienie kilku innych faz. Przed pokonaniem zasadniczych trudności zadania wyróżniamy jeszcze jedną lub dwie fazy je poprzedzające: dokonanie niewielkiego postępu, który jednak jest konieczny dla rozwiązania zadania oraz dokonanie istotnego postępu w rozwiązaniu zadania. Zdający, który pokonał zasadnicze trudności zadania mógł na tym poprzestać lub mógł kontynuować rozwiązanie. Wyróżniamy ważną kategorię rozwiązań, w których zdający pokonał zasadnicze trudności zadania i kontynuował rozwiązanie do końca, jednak w rozwiązaniu

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego

ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl

popełnił błędy niewpływające na poprawność całego rozumowania (np. nieistotne dla całego rozumowania błędy rachunkowe lub niektóre błędy nieuwagi). Analogicznie wyróżniamy kategorię pokonania zasadniczych trudności z nieistotnymi błędami. W każdym przypadku określana jest liczba punktów przyznawana za rozwiązania w każdej (lub niektórych) z powyższych kategorii. Należy tu podkreślić, że schemat oceniania rozwiązania zadania jest traktowany jako integralna część zadania; na ogół ten schemat oceniania uwzględnia wszystkie typowe sposoby rozwiązania i czasami również niektóre nietypowe.

Podsumowując: w rozwiązaniach zadań krótkiej odpowiedzi wyróżniamy następujące trzy kategorie. Dla ujednolicenia terminologii, w rozwiązaniach, za które przyznajemy 1 punkt, piszemy także o pokonaniu zasadniczych trudności.

1.	rozwiązanie, w którym nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania	0 pkt
2.	zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale zadanie nie zostało rozwiązane bezbłędnie	1 pkt
3.	zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie	2 pkt

Pokażemy teraz kilka przykładowych sposobów przydziału punktów za poszczególne fazy rozwiązania zadań rozszerzonej odpowiedzi. Najprostszy podział punktów za rozwiązanie zadania za 4 punkty wygląda następująco:

1.	rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu	0 pkt
2.	został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania lub zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, rozwiązanie zadania nie zostało doprowadzone do końca, ale w trakcie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały popełnione błędy, usterki	1 pkt
3.	zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie	2 pkt
4.	zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, ale rozwiązanie zadania zawiera błędy, usterki	3 pkt
5.	zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie	4 pkt

Przykładowy przydział punktów za rozwiązanie zadania za 5 punktów może przedstawiać się następująco:

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego

ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl

1.	rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu	0 pkt
2.	został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania	1 pkt
3.	zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy, usterki	2 pkt
4.	zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie	3 pkt
5.	zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.)	4 pkt
6.	zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie	5 pkt

A oto inny przydział punktów w zadaniu za 5 punktów oraz przykładowy sposób przydziału punktów w zadaniu za 6 punktów:

1.	rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu	0 pkt
2.	rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania	1 pkt
3.	został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania lub zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, rozwiązanie zadania nie zostało doprowadzone do końca, ale w trakcie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały popełnione błędy, usterki	2 pkt
4.	zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie	3 pkt
5.	zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.)	4 pkt
6.	zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie	5 pkt

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego
ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl

1.	rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu	0 pkt
2.	rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania	1 pkt
3.	został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania	2 pkt
4.	zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, rozwiązanie zadania nie zostało doprowadzone do końca, ale w trakcie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały popełnione błędy, usterki	3 pkt
5.	zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie	4 pkt
6.	zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.)	5 pkt
7.	zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie	6 pkt

2. Procedury tworzenia schematów oceniania zadań

W długim i żmudnym procesie opracowywania schematów oceniania intensywnie korzysta się z rozwiązań uczniowskich, pozyskanych w procesie standaryzacji. W szczególności, wydrębnia się wszystkie typowe drogi wybierane przez uczniów. Także dla próbnej matury 2009 przygotowano punktację dla wielu wariantów rozwiązania. I tak:

zad. 26	(nierówność kwadratowa)	uwzględniono 3 sposoby rozwiązania
zad. 27	(równanie trzeciego stopnia)	uwzględniono 2 sposoby rozwiązania
zad. 28	(kwadrat w układzie wsp.)	uwzględniono 6 sposobów rozwiązania
zad. 29	(trygonometria)	uwzględniono 4 sposoby rozwiązania
zad. 30	(ciąg arytmetyczny)	uwzględniono 4 sposoby rozwiązania
zad. 31	(dowód geometryczny)	uwzględniono 4 sposoby rozwiązania
zad. 32	(książka)	uwzględniono 1 sposób rozwiązania
zad. 33	(trójkąt w układzie wsp.)	uwzględniono 6 sposobów rozwiązania
zad. 34	(trójkąt prostokątny)	uwzględniono 4 sposoby rozwiązania

Przykładowe oryginalne rozwiązania uczniowskie stanowiły integralną część schematów oceniania. Tak przygotowany schemat oceniania wszystkich zadań otwartych liczył ok. 80 stron. W szczególności szkolenie egzaminatorów odbywało się na podstawie tak skonstruowanych schematów oceniania, łącznie z wykorzystaniem przykładowych rozwiązań uczniowskich.

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego

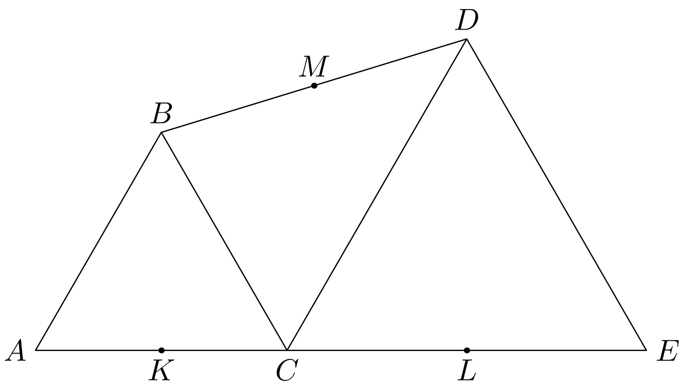
ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl

3. Postępowanie w przypadku rozwiązań nietypowych

Podczas pracy kilkuset Zespołów Egzaminacyjnych w CKE pracował Centralny Zespół Ekspertów Matematycznych (CZEM), do którego należało rozstrzyganie wszelkich wątpliwości osób oceniających rozwiązania uczniów. Zapewnia to taką samą ocenę nietypowych dróg rozwiązania lub błędów, przez co zapewnia porównywalność ocen poszczególnych uczniów. Rozstrzygnięcia CZEM były natychmiast komunikowane wszystkim egzaminatorom. Oto najważniejsze z przyjętych ustaleń.

Ustalenia dotyczące rozwiązań zadania 31

Treść zadania: Trójkąty ABC i CDE są równoboczne. Punkty A, C i E leżą na jednej prostej. Punkty K, L i M są środkami odcinków AC, CE i BD (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty K, L i M są wierzchołkami trójkąta równobocznego.



Lista najczęściej występujących błędów w pracach przysłanych do CZEM

1. Nieprawidłowe użycie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa. Ten błąd omawiamy dokładnie w dalszej części ustaleń.

2. Faktyczne założenie (bez próby uzasadnienia), że trójkąt KLM jest równoramienny (na przykład poprzez założenie, że spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka M dzieli podstawę KL na połowy). Ten błąd występuje na przykład w rozwiązaniach, w których zdający oblicza wysokość trójkąta KLM, dochodzi do wniosku, że jest ona równa $\frac{KL\sqrt{3}}{2}$ i stąd wnioskuje, że trójkąt KLM jest równoboczny. Jest to oczywiste w przypadku, gdy ten trójkąt jest równoramienny. Bez uzasadnienia równoramienności takie rozwiązanie oceniamy na 0 punktów.
   Najprostsze uzasadnienie równoramienności może odwoływać się do tego, że ta wysokość trójkąta KLM jest linią środkową trapezu prostokątnego $KLDB$.

3. Faktyczne założenie (bez próby uzasadnienia), że punkt przecięcia odcinków KM i BC dzieli odcinek BC na połowy. Inaczej: niektórzy zdający zaczynają od wyboru środka S odcinka BC, a następnie bez dowodu korzystają z tego, że punkty K, S i M są współliniowe.

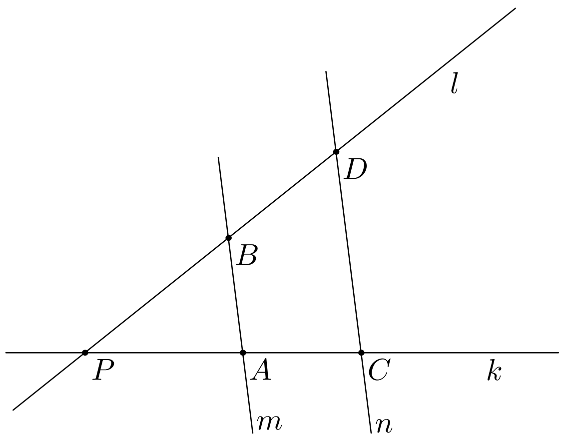
Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego
ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl

4. W rozwiązaniach wykorzystujących rachunek wektorowy, przyjęcie, że długość sumy wektorów jest sumą długości – nie powołując się na to, że te wektory były równoległe i miały zgodny zwrot.

Jednym z najczęściej spotykanych błędów w rozwiązaniach zadania 31 było nieprawidłowe użycie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa. Zdecydowana większość przysłanych rozwiązań dotyczyła właśnie tego błędu. Wyjaśnimy dokładnie tę kwestię.

Twierdzenie Talesa jest często formułowane w jednej z dwóch postaci.

Postać I. Dwie proste k i l przecinają się w punkcie P. Prosta m przecina prostą k w punkcie A i prostą l w punkcie B. Prosta n przecina prostą k w punkcie C i prostą l w punkcie D (zob. rysunek).



Wówczas, jeśli proste m i n są równoległe, to

$$\frac{PA}{AC} = \frac{PB}{BD}$$

(w innej wersji: $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD}$).

Twierdzenie odwrotne do tej postaci twierdzenia Talesa ma wtedy następujące sformułowanie:

Dwie proste k i l przecinają się w punkcie P. Prosta m przecina prostą k w punkcie A i prostą l w punkcie B. Prosta n przecina prostą k w punkcie C i prostą l w punkcie D (zob. powyższy rysunek). Wówczas, jeśli

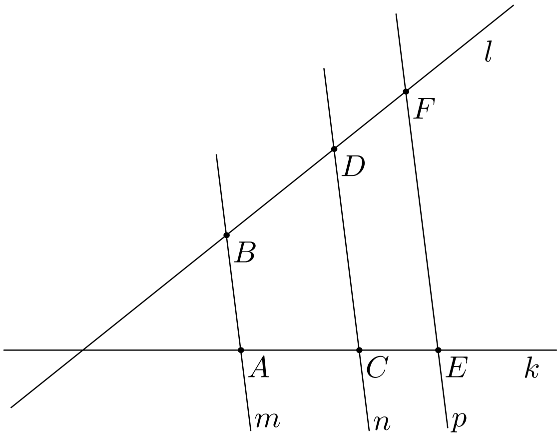
$$\frac{PA}{AC} = \frac{PB}{BD}$$

(lub w innej wersji: $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD}$), to proste m i n są równoległe.

Postać II. Dane są dwie proste k i l. Prosta m przecina prostą k w punkcie A i prostą l w punkcie B. Prosta n przecina prostą k w punkcie C i prostą l w punkcie D. Prosta p przecina prostą k w punkcie E i prostą l w punkcie F (zob. rysunek).

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego

ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl



Wówczas, jeśli proste m, n i p są równoległe, to

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}.$$

Twierdzenie odwrotne do tej postaci twierdzenia Talesa ma wtedy następujące sformułowanie:

Dane są dwie proste k i l. Prosta m przecina prostą k w punkcie A i prostą l w punkcie B. Prosta n przecina prostą k w punkcie C i prostą l w punkcie D. Prosta p przecina prostą k w punkcie E i prostą l w punkcie F (zob. powyższy rysunek). Wówczas, jeśli **dwie proste spośród prostych m, n i p są równoległe** oraz

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF},$$

to **trzecia prosta jest równoległa do dwóch pozostałych**. Na przykład, jeśli proste m i p są równoległe oraz

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF},$$

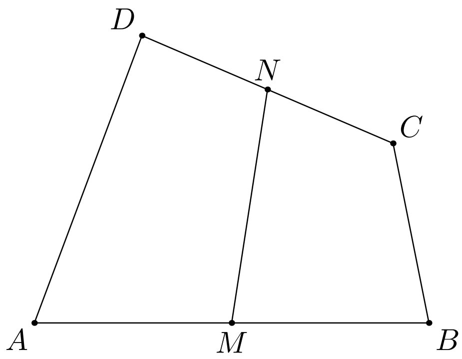
to prosta n jest równoległa do prostych m i p.

Należy wyraźnie podkreślić, że bez założenia równoległości dwóch spośród prostych m, n i p (na przykład prostych m i p), twierdzenie nie jest prawdziwe.

Weźmy na przykład dowolny czworokąt $ABCD$ i środki M i N boków AB i CD (zob. rysunek).

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów współfinansowanych z Europejskiego Funduszu Społecznego

ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl



Wówczas oczywiście

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC},$$

ale boki AD i BC nie są równoległe. Oczywiście odcinek MN nie jest równoległy do żadnego z boków AD i BC. Gdyby natomiast boki AD i BC były równoległe (a więc czworokąt $ABCD$ byłby trapezem o podstawach AD i BC), to odcinek MN byłby równoległy do obu tych odcinków. Jest to zatem w istocie twierdzenie o **linii środkowej trapezu**: odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do obu podstaw. Twierdzenie o linii środkowej trapezu mówi zresztą więcej: długość linii środkowej jest średnią arytmetyczną długości podstaw.

We wszystkich rozwiązaniach, **w których nie jest wyraźnie zaznaczone**, że zdający korzysta z równoległości odcinków AB i CD (w przypadku trapezu $ACDB$ i linii środkowej KM) lub CB i ED (w przypadku trapezu $CEDB$ i linii środkowej LM), rozwiązania nie możemy uznać za poprawne i przyznajemy 0 punktów. W szczególności we wszystkich rozwiązaniach, w których zdający wyraźnie pisze, że z podanej proporcji wynika równoległość odcinków, dajemy 0 punktów.

4. Omówienie wybranych schematów oceniania zadań otwartych

Przedstawimy tu wybrane rozwiązania zadań otwartych i schematy oceniania takich rozwiązań.

Zadanie 26. (2 punkty)
Rozwiąż nierówność $x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

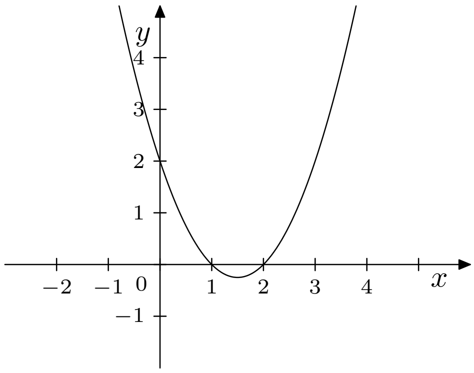
I sposób rozwiązania: obliczanie wyróżnika
Obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 3x + 2$:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1,$$
$$\sqrt{\Delta} = 1,$$
$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$$

lub zapisujemy nierówność w postaci: $(x-1)(x-2) \leq 0$.

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego
ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl

Rysujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej f i na jego podstawie odczytujemy rozwiązania nierówności:



Odpowiedź: $x \in \langle 1, 2 \rangle$.

Zdający otrzymuje . . . . **1 pkt**

gdy:

- obliczy lub poda prawidłowo pierwiastki trójmianu kwadratowego $x = 1$, $x = 2$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $(x - 1)(x - 2)$ i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność, np. zapisze, że $x_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$, $x \in \left\langle \frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2} \right\rangle$.

Zdający otrzymuje . . . . **2 pkt**

gdy:

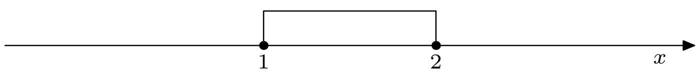
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\langle 1, 2 \rangle$ lub $x \in \langle 1, 2 \rangle$ lub $1 \le x \le 2$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \ge 1$, $x \le 2$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Uwagi:

1. Przyznajemy 2 punkty za rozwiązanie, w którym zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x = 1$, $x = 2$ i zapisze np.: $x \in \langle -1, 2 \rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków.

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego

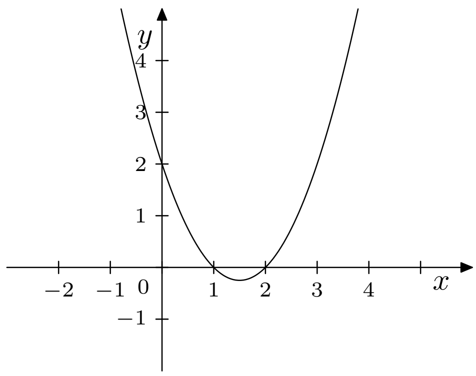
ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl

2. W związku z rozbieżnością w rozumieniu i używaniu spójników w języku potocznym oraz formalnym języku matematycznym akceptujemy zapis, np.: $x \geq 1$, $x \leq 2$.

II sposób rozwiązania: postać kanoniczna lub moduł
Zapisujemy nierówność np. w postaci: $x^2 - 3x + 2 - \frac{9}{4} + \frac{9}{4} \leq 0$, a następnie przekształcamy ją

$$\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} \leq 0 \quad \text{lub} \quad \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 \leq \tfrac{1}{4}$$
$$\left(x - \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\right)\left(x - \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\right) \leq 0 \quad \text{lub} \quad \left|x - \tfrac{3}{2}\right| \leq \tfrac{1}{2}$$
$$(x-2)(x-1) \leq 0 \quad \text{lub} \quad x - \tfrac{3}{2} \leq \tfrac{1}{2} \text{ i } x - \tfrac{3}{2} \geq -\tfrac{1}{2}$$

W pierwszym przypadku odczytujemy miejsca zerowe funkcji $f(x) = (x-1)(x-2)$: $x = 1$, $x = 2$. Następnie rysujemy fragment wykresu funkcji:



W drugim przypadku rozwiązujemy obie nierówności.
Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $x \in \langle 1, 2\rangle$ lub $x \geq 1$, $x \leq 2$ lub $1 \leq x \leq 2$.

Zdający otrzymuje . . . . **1 pkt**
gdy:
- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $(x-1)(x-2)$ i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność
- zapisze nierówność $\left|x - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

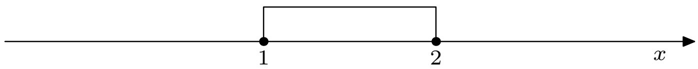
albo
- popełni błąd rachunkowy przy rozkładaniu trójmianu kwadratowego na czynniki i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność
- błędnie zapisze nierówność, np.: $\left|x + \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$ i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje . . . . **2 pkt**
gdy:
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\langle 1, 2\rangle$ lub $x \in \langle 1, 2\rangle$ lub $1 \leq x \leq 2$

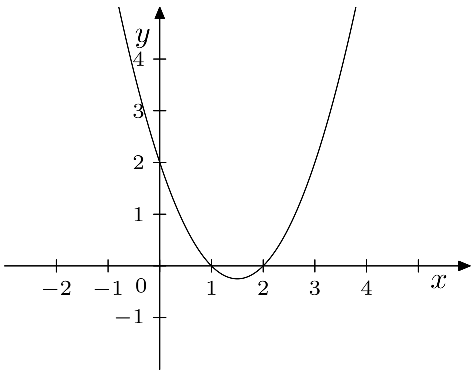
albo
- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \geq 1$, $x \leq 2$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



III sposób rozwiązania: wzory Viète'a
Zapisujemy równania: $x_1 + x_2 = 3$ i $x_1 \cdot x_2 = 2$.
Obliczamy pierwiastki: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.
Rysujemy fragment wykresu funkcji:



Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $x \in \langle 1, 2\rangle$ lub $x \geq 1$, $x \leq 2$.

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**
gdy:

- prawidłowo zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a : $x_1 + x_2 = 3$ oraz $x_1 \cdot x_2 = 2$, obliczy pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a: $x_1 + x_2 = -3$ i $x_1 \cdot x_2 = 2$ lub $x_1 + x_2 = 3$ i $x_1 \cdot x_2 = -2$ i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**
gdy:

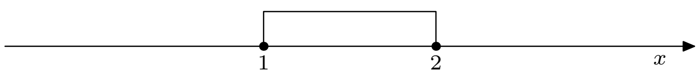
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\langle 1, 2\rangle$ lub $x \in \langle 1, 2\rangle$ lub $1 \leq x \leq 2$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \geq 1$, $x \leq 2$.

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego
ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl

Zadanie 27. (2 punkty)
Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = 0$.

I sposób rozwiązania: grupowanie
Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynowej, stosując metodę grupowania:

$$x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = x^2(x-7) + 2(x-7) = (x^2+2)(x-7).$$

Z równania $(x^2+2)(x-7) = 0$ otrzymujemy, że

$$x^2 + 2 = 0 \quad \text{lub} \quad x - 7 = 0.$$

Równanie $x^2 + 2 = 0$ nie ma rozwiązań. Rozwiązaniem równania $x - 7 = 0$ jest liczba 7.
Odpowiedź: Jedynym rozwiązaniem równania $x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = 0$ jest $x = 7$.

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**
gdy pogrupuje wyrazy do postaci, z której łatwo można przejść do postaci iloczynowej, np.: $x^2(x-7) + 2(x-7) = 0$ lub $x(x^2+2) - 7(x^2+2) = 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**
gdy bezbłędnie wyznaczy rozwiązanie równania: $x = 7$.

Uwagi:
1. Nie wymagamy komentarza, że równanie $x^2 + 2 = 0$ jest sprzeczne lub że nie ma rozwiązania.
2. Zdający może od razu zapisać rozkład na czynniki. Jeśli na tym poprzestanie lub błędnie poda rozwiązanie równania, to otrzymuje 1 punkt.
3. Jeżeli zdający otrzyma rozwiązanie $x = 7$ i poda dodatkowo inne „rozwiązania”, np. $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$, to otrzymuje 1 punkt.
4. Jeżeli zdający podejmuje próbę grupowania, która nie prowadzi do postaci iloczynowej np. $(x^3 - 14) - x(7x - 2) = 0$ lub $(x^3 - 14) + x(-7x + 2) = 0$ i na tym poprzestaje, to otrzymuje 0 pkt.
5. Jeżeli zdający poda odpowiedź $x = 7$, $x = \mathrm{i}\sqrt{2}$, $x = -\mathrm{i}\sqrt{2}$, to otrzymuje 2 punkty, a gdy poda odpowiedź $x = \sqrt{-2}$, $x = -\sqrt{-2}$ oraz $x = 7$, to otrzymuje 1 punkt.

Drugi sposób rozwiązania polega na odgadnięciu pierwiastka całkowitego wielomianu ($x = 7$) i podzieleniu wielomianu przez dwumian $x - 7$ (metodą „pisemną” lub za pomocą algorytmu Hornera).

Zadanie 28. (2 punkty)
W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty $A = (2,5)$ i $C = (6,7)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz równanie prostej BD.

I sposób rozwiązania: współczynnik kierunkowy
Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AC: $a_{AC} = \frac{7-5}{6-2} = \frac{1}{2}$, a następnie wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej BD prostopadłej do AC: $a_{BD} = -2$.

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego

ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl

Wyznaczamy współrzędne środka S odcinka AC: $S = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{5+7}{2}\right) = (4,6)$ i wyznaczamy równanie prostej o współczynniku kierunkowym -2, przechodzącej przez punkt S. Odpowiedź: $y = -2x + 14$.

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**
gdy wyznaczy równanie prostej AC lub jej współczynnik kierunkowy oraz:

- obliczy współczynnik kierunkowy prostej BD

lub

- poda współrzędne środka S odcinka AC: $S = (4,6)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**
gdy zapisze równanie prostej BD, np.:

- $y = -2x + 14$
- $y = -2(x-4) + 6$
- $2x + y - 14 = 0$
- $4(x-4) + 2(y-6) = 0$.

VI sposób rozwiązania: Na podstawie współrzędnych punktów $A = (2,5)$ i $C = (6,7)$ zapisujemy równość odległości $|AP| = |CP|$ (lub kwadratów odległości $|AP|^2 = |CP|^2$) od dowolnego punktu P leżącego na symetralnej odcinka AC, np.:

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 = (x-6)^2 + (y-7)^2.$$

Wyznaczamy równanie prostej BD w dowolnej postaci, np. $y = -2x + 14$.

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**
gdy zapisze, że $|AP| = |CP|$ oraz jedną z długości $|AP| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}$ lub $|CP| = \sqrt{(x-6)^2 + (y-7)^2}$ (lub jej kwadrat) i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**
gdy zapisze równanie prostej BD, np.

- $y = -2x + 14$
- $y = -2(x-4) + 6$
- $2x + y - 14 = 0$
- $4(x-4) + 2(y-6) = 0$
- $(x-2)^2 + (y-5)^2 = (x-6)^2 + (y-7)^2$.

Inne sposoby rozwiązania polegały na:

- wyznaczeniu współrzędnych punktów B i D, a następnie równania prostej przechodzącej przez te dwa punkty (sposób II);
- wyznaczeniu równania symetralnej odcinka AC ze wzoru

$$(x_C - x_A)x + (y_C - y_A)y - (x_C - x_A)x_S - (y_C - y_A)y_S = 0$$

(sposób III);

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego

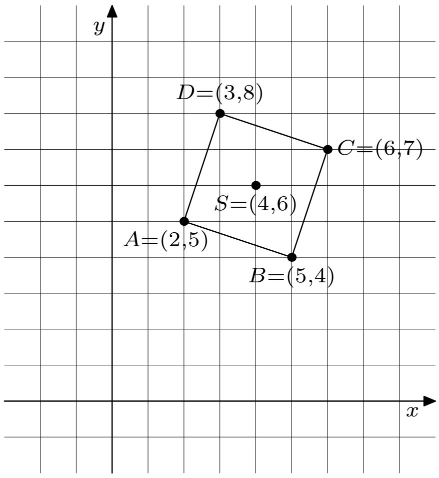
ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl

- skorzystaniu z iloczynu skalarnego wektorów (sposób IV);
- wyznaczeniu równania parametrycznego prostej BD:

$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 6 + 4t \end{cases}$$

(sposób V).

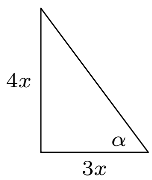
Uwaga: W sposobie II dopuszczano odczytanie współrzędnych punktów B, D i S bezpośrednio z rysunku na papierze kratkowanym, np.:



Zadanie 29. (2 punkty)
Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz $\sin\alpha + \cos\alpha$.

III sposób rozwiązania: trójkąt prostokątny
Rysujemy trójkąt prostokątny, w którym oznaczamy przyprostokątne $3x$ i $4x$ oraz zaznaczamy kąt ostry α tak, aby $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

Uwaga: Zdający może oznaczyć długości przyprostokątnych liczbami 3 oraz 4.



Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość przeciwprostokątnej: $(4x)^2 + (3x)^2 = 25x^2$. Zatem przeciwprostokątna ma długość $5x$. Obliczamy wartości funkcji $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ oraz $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Stąd $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$.

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego

ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**
gdy:
- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 3 i 4 (lub np. $3x$ i $4x$), nawet z błędem rachunkowym oraz zapisze co najmniej jedną z liczb $\sin\alpha$ lub $\cos\alpha$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo
- narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 3 i 4 (lub np. $3x$ i $4x$) i zaznaczy w tym trójkącie poprawnie kąt α

albo
- obliczy $\sin\alpha + \cos\alpha$ popełniając błąd rachunkowy.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**
gdy obliczy $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$.

Pozostałe sposoby rozwiązania polegały na:
- zapisaniu układu równań z niewiadomymi $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ oraz doprowadzeniu tego układu do równania kwadratowego z jedną niewiadomą ($\sin\alpha$ lub $\cos\alpha$). Jedno równanie pochodziło z wyrażenia funkcji tangens za pomocą pozostałych dwóch funkcji, drugim była tzw. „jedynka trygonometryczna" (sposób I i II);

- odczytaniu z tablic przybliżonej wartości α, a następnie znalezieniu w tablicach dla tej wartości α odpowiednich wartości $\sin\alpha$ oraz $\cos\alpha$ (sposób IV).

Zadanie 30. (2 punkty)
Wykaż, że dla każdego m ciąg $\left(\frac{m+1}{4}, \frac{m+3}{6}, \frac{m+9}{12}\right)$ jest arytmetyczny.

I sposób rozwiązania: wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego
Wystarczy sprawdzić, że zachodzi następujący związek między sąsiednimi wyrazami ciągu: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ (lub $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$).
Mamy $a_1 = \frac{m+1}{4}$, $a_2 = \frac{m+3}{6}$, $a_3 = \frac{m+9}{12}$. Zatem

$$\frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{\frac{m+1}{4} + \frac{m+9}{12}}{2} = \frac{3m+3+m+9}{24} = \frac{4m+12}{24} = \frac{m+3}{6} = a_2$$

lub

$$a_1 + a_3 = \frac{m+1}{4} + \frac{m+9}{12} = \frac{3m+3+m+9}{12} = \frac{4m+12}{12} = \frac{m+3}{3} = 2a_2.$$

Stąd wynika, że ciąg $\left(\frac{m+1}{4}, \frac{m+3}{6}, \frac{m+9}{12}\right)$ jest arytmetyczny dla każdego m.

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**
gdy zapisze warunek:

$$\frac{\frac{m+1}{4} + \frac{m+9}{12}}{2} = \frac{m+3}{6}$$

lub

$$\frac{m+1}{4} + \frac{m+9}{12} = 2 \cdot \frac{m+3}{6}.$$

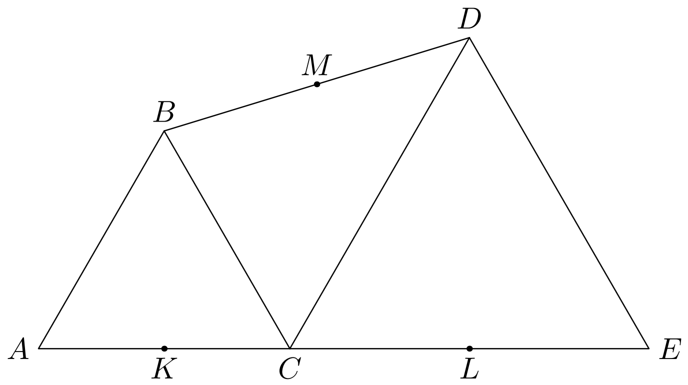
Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego

ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**
gdy z przedstawionego zapisu wynika, że otrzymana równość jest tożsamością.

Pozostałe sposoby rozwiązania polegały na:
- obliczeniu obu różnic i przekonaniu się, że dla każdego m są one równe (sposób II);
- obliczeniu różnicy $r = a_2 - a_1$ i wyrazu $a_3 = a_2 + r$ (sposób III);
- skorzystaniu ze wzorów na drugi i trzeci wyraz ciągu arytmetycznego, ułożeniu układu równań i przekonaniu się, że jest on spełniony tożsamościowo dla każdego m (sposób IV).

Zadanie 31. (2 punkty)
Trójkąty ABC i CDE są równoboczne. Punkty A, C i E leżą na jednej prostej. Punkty K, L i M są środkami odcinków AC, CE i BD (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty K, L i M są wierzchołkami trójkąta równobocznego.



I sposób rozwiązania: linia środkowa trapezu
Z warunków zadania wynika, że $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle DCE| = 60^\circ$, więc odcinki AB i CD są równoległe. Czworokąt $ACDB$ jest więc trapezem. Wynika stąd, że odcinek KM łączy środki boków nierównoległych w tym trapezie, więc jest równoległy do jego podstaw. Wobec tego $|\measuredangle MKL| = 60^\circ$. Analogiczne rozumowanie przeprowadzamy dla trapezu $CEDB$ i wykazujemy, że $|\measuredangle MLK| = 60^\circ$, a więc trójkąt KLM jest równoboczny.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**
- gdy uzasadni, że odcinek KM jest równoległy do AB (lub do CD) oraz, że odcinek ML jest równoległy do DE (lub do BC), oraz zapisze, że $|\measuredangle MKL| = 60^\circ$ i $|\measuredangle MLK| = 60^\circ$.
  W uzasadnieniu **wymagamy**, aby zdający zapisał, że czworokąty $ABCD$ oraz $CEDB$ są trapezami oraz, że punkty K, L, M są środkami odpowiednich ramion tych trapezów

albo
- powoła się na twierdzenie o odcinku łączącym środki nierównoległych boków trapezu.

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego

ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl

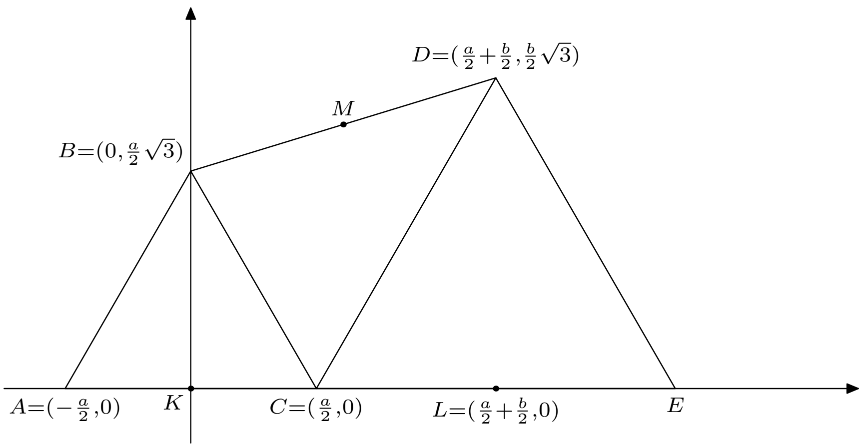
Uwaga: Jeśli zdający zapisze tylko, że trójkąt jest równoboczny albo uzupełni rysunek o odcinki KM i ML i zaznaczy kąty $60°$ przy wierzchołkach K i L trójkąta KLM, to otrzymuje 0 punktów.

Dwa następne sposoby rozwiązania inaczej wykorzystywały twierdzenie o linii środkowej trapezu; w sposobie II korzystamy z tego, że długość linii środkowej trapezu jest średnią arytmetyczną długości podstaw, w sposobie III prowadzimy wysokości BK i DL, a następnie korzystamy z własności linii środkowej trapezu $KLDB$.

Zdający, zamiast powoływać się na twierdzenie o linii środkowej trapezu, mogli skorzystać z właściwej postaci twierdzenia odwrotnego to twierdzenia Talesa. Związane z tym problemy zostały omówione wcześniej.

Zadanie 31 miało na celu sprawdzenie umiejętności opisanych w standardzie V (rozumowanie i wnioskowanie). Dlatego w powyżej opisanych sposobach rozwiązania wymagano poprawnego, bezbłędnego dowodu i nie opisano sytuacji, w których egzaminator mógł przyznać 1 punkt. Takie sytuacje wyróżniono natomiast w sposobie IV. Egzaminatorzy zostali natomiast poinformowani, że w wyjątkowych sytuacjach (np. dowód prowadzony poprawnie, ale niedokończony) możliwe jest przyznanie 1 punktu, ale decyzje w tych przypadkach podejmuje CZEM. Miało to zapewnić porównywalność takich ocen. Zgłaszano także wszystkie rozwiązania poprawne nieopisane w schemacie oceniania.

IV sposób rozwiązania: geometria analityczna
Umieszczamy oba trójkąty w układzie współrzędnych jak na rysunku i oznaczamy długość boku trójkąta ABC przez a oraz długość boku trójkąta CDE przez b.



Wtedy $B=(0,\frac{a}{2}\sqrt{3})$, $C=(\frac{a}{2},0)$, $L=(\frac{a}{2}+\frac{b}{2},0)$ i $D=\frac{a}{2}+\frac{b}{2},\frac{b}{2}\sqrt{3})$.
Punkt M jest środkiem odcinka BD, więc

$$M=\left(\frac{0+(\frac{a}{2}+\frac{b}{2})}{2},\frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}+\frac{b}{2}\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{4},\frac{a+b}{4}\cdot\sqrt{3}\right).$$

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów współfinansowanych z Europejskiego Funduszu Społecznego

ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl

Prosta KM ma współczynnik kierunkowy równy $\sqrt{3}$, więc jest nachylona do osi Ox pod kątem $60°$. Współczynnik kierunkowy prostej ML jest równy $-\sqrt{3}$, co oznacza, że kąt nachylenia prostej ML do osi Ox jest równy $120°$, więc kąt MLK ma miarę $60°$. Stąd wnioskujemy, że trójkąt KLM jest równoboczny.

Uwaga: Po umieszczeniu obu trójkątów w układzie współrzędnych i obliczeniu współrzędnych punktów K, L i M zdający może obliczyć długości boków trójkąta KLM i stwierdzić, że są one równe $\frac{a+b}{2}$. Może też obliczać kwadraty tych długości.

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**
gdy umieści trójkąty w układzie współrzędnych i wyznaczy współrzędne punktów K, L, M w zależności od długości boków trójkątów ABC i CDE i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.
Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

- gdy obliczy współczynniki kierunkowe prostych KM oraz ML i na tej podstawie poda kąty trójkąta KLM

albo

- obliczy długości boków trójkąta KLM.

Uwaga: Układ współrzędnych może być umieszczony inaczej, np. początkiem układu może być punkt A albo punkt C.

Zadanie 32. (5 punktów)
Uczeń przeczytał książkę liczącą 480 stron, przy czym każdego dnia czytał jednakową liczbę stron. Gdyby czytał każdego dnia o 8 stron więcej, to przeczytałby tę książkę o 3 dni wcześniej. Oblicz, ile dni uczeń czytał tę książkę.

Uwaga: Rozwiązania, w których zdający myli typy wielkości, np. dodaje liczbę stron do liczby dni, a także rozwiązania, w których przyjmuje, że liczby stron przeczytanych w kolejnych dniach tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 8, oceniamy na 0 punktów.

I sposób rozwiązania: układ równań
Oznaczamy: x – liczba stron przeczytanych każdego dnia, y – liczba dni.
Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x \cdot y = 480 \\ (x+8)\cdot(y-3) = 480 \end{cases}$$

Z pierwszego równania mamy $x = \frac{480}{y}$, zatem

$$\left(\frac{480}{y} + 8\right)\cdot(y-3) = 480,$$

czyli

$$(480+8y)(y-3) = 480y.$$

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego

ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl

Po uproszczeniu otrzymujemy równanie kwadratowe $y^2 - 3y - 180 = 0$.

Do tego równania kwadratowego można dojść także inną metodą. Wykonujemy mnożenia w drugim równaniu:

$$xy - 3x + 8y - 24 = 480$$

i po podstawieniu $xy = 480$ otrzymujemy równanie liniowe:

$$8y - 3x = 24.$$

Stąd obliczamy $x = \frac{8}{3} \cdot y - 8$ i podstawiamy do pierwszego równania. Otrzymujemy

$$y \cdot \left(\frac{8}{3} \cdot y - 8\right) = 480.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy równanie kwadratowe $y^2 - 3y - 180 = 0$.

Rozwiązaniami tego równania kwadratowego są liczby: $y = -12$ oraz $y = 15$. Odrzucamy ujemną liczbę dni.

Odpowiedź: Uczeń przeczytał książkę w ciągu 15 dni.

Uwaga: W zamieszczonym poniżej schemacie używamy niewiadomych x, y oznaczających odpowiednio liczbę stron przeczytanych każdego dnia oraz liczbę dni. Oczywiście w pracach maturalnych te niewiadome mogą być oznaczane w inny sposób. Nie wymagamy, by te niewiadome były wyraźnie opisane na początku rozwiązania, o ile z postaci równań jasno wynika ich znaczenie.

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... **1 pkt**
Zapisanie zależności między liczbą stron przeczytanych jednego dnia oraz liczbą dni, np.: $x \cdot y = 480$ lub $(x+8)(y-3) = 480$,
gdzie x jest liczbą stron przeczytanych jednego dnia, a y – liczbą dni.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**
Zapisanie układu równań z niewiadomymi x i y, np.:

$$\begin{cases} x \cdot y = 480 \\ (x+8) \cdot (y-3) = 480 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**
Zapisanie równania z jedną niewiadomą x lub y, np:

$$(x+8) \cdot \left(\frac{480}{x} - 3\right) = 480$$

lub

$$\left(\frac{480}{y} + 8\right) \cdot (y-3) = 480$$

lub

$$x^2 + 8x - 1280 = 0$$

lub

$$y^2 - 3y - 180 = 0.$$

Uwaga: Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe, usterki .... **2 pkt**

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania zadania (np. błędy rachunkowe) .... **4 pkt**

- rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą x bezbłędnie i nieobliczenie liczby dni

albo

- rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą x z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie liczby dni

albo

- rozwiązanie zadania do końca z błędem rachunkowym popełnionym w którejkolwiek fazie rozwiązania, w tym również na początku, dalsze rozwiązanie jest przeprowadzone konsekwentnie w stosunku do popełnionego błędu a sam błąd nie spowodował istotnej zmiany w sposobie rozwiązywania zadania (np. nie spowodował, że otrzymano równanie liniowe zamiast kwadratowego lub nie zmienił liczby dopuszczalnych pierwiastków równania).

Rozwiązanie bezbłędne .... **5 pkt**
Odrzucenie odpowiedzi $y = -12$ i podanie prawidłowej odpowiedzi: Uczeń przeczytał tę książkę w ciągu 15 dni.

Uwaga: Jeśli zdający nie opisze wprowadzonych oznaczeń, a z przedstawionego rozwiązania nie można jednoznacznie zinterpretować wprowadzonych niewiadomych (np. zapisy są wzajemnie sprzeczne), to oceniamy rozwiązanie na 0 punktów.

Zadanie 33. (4 punkty)
Punkty $A = (2, 0)$ i $B = (12, 0)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego ABC o przeciwprostokątnej AB. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = x$. Oblicz współrzędne punktu C.

I sposób rozwiązania: prosta i okrąg
Punkt C leży na prostej o równaniu $y = x$ i na okręgu, którego środkiem jest środek przeciwprostokątnej, a promień jest równy połowie długości tej przeciwprostokątnej.
Obliczamy długość przeciwprostokątnej AB: $|AB| = |12 - 2| = 10$.
Wyznaczamy współrzędne środka przeciwprostokątnej: $S = (7, 0)$.
Zapisujemy równanie okręgu: $(x - 7)^2 + y^2 = 25$.

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego

ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} y = x \\ (x-7)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Po podstawieniu $y = x$ do drugiego równania, otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą:

$$(x-7)^2 + x^2 = 25,$$

czyli po uproszczeniu

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Rozwiązaniami tego równania są liczby: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają dwa punkty: $C = (3,3)$ oraz $C = (4,4)$.

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**
Wyznaczenie współrzędnych środka przeciwprostokątnej: $S = (7,0)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**
Zapisanie układu równań (dana prosta i okrąg o średnicy AB)

$$\begin{cases} y = x \\ (x-7)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**
Sprowadzenie układu równań do równania kwadratowego z jedną niewiadomą

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \quad \text{lub} \quad y^2 - 7y + 12 = 0.$$

Rozwiązanie bezbłędne .... **4 pkt**
Obliczenie współrzędnych obu punktów C: $C = (3,3)$, $C = (4,4)$.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy w zapisie układu równań i na tym poprzestanie, to przyznajemy 1 punkt.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy w sprowadzeniu układu równań do równania kwadratowego z jedną niewiadomą i na tym poprzestanie, to przyznajemy 2 punkty.
3. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy w zapisie układu równań lub w sprowadzeniu układu równań do równania kwadratowego z jedną niewiadomą i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to przyznajemy 3 punkty.

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego

ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl

Pozostałe sposoby rozwiązania polegały na:

- przyjęciu, że $C = (x, x)$ i zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa (sposób II);
- przyjęciu, że $C = (x, x)$ i skorzystaniu z iloczynu skalarnego $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ (sposób III);
- odczytaniu współrzędnych punktu C z rysunku zrobionego na papierze kratkowanym (sposób IV);
- skorzystaniu z własności wysokości trójkąta prostokątnego poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego (sposób V);
- skorzystaniu ze współczynników kierunkowych prostych AC i BC (sposób VI).

Uwaga: W sposobie IV rozwiązanie bezbłędne polega na wskazaniu obu możliwości $C = (3, 3)$ i $C = (4, 4)$ oraz wykazaniu, że zadanie ma tylko dwa rozwiązania. Samo wskazanie punktów było oceniane na 2 pkt (za wskazanie jednego punktu C zdający otrzymywał 1 punkt).

Zadanie 34. (4 punkty)

Pole trójkąta prostokątnego jest równe 60 cm^2. Jedna przyprostokątna jest o 7 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

I sposób rozwiązania: wzór na pole trójkąta i układ równań

Oznaczmy literami a i b długości przyprostokątnych danego trójkąta (a oznacza dłuższą przyprostokątną). Zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} a = b + 7 \\ \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = 60 \end{cases}$$

Po podstawieniu $a = b + 7$ do drugiego równania otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą

$$\frac{1}{2} \cdot b(b + 7) = 60,$$

którego rozwiązaniami są liczby $b = 8$ i $b = -15$.

Odrzucamy ujemny pierwiastek, gdyż b jest długością odcinka. Zatem $b = 8$ i następnie $a = 8 + 7 = 15$. Obliczamy wreszcie długość przeciwprostokątnej

$$c = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17.$$

Odpowiedź: Przeciwprostokątna ma długość 17 cm.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **1 pkt**

- Zapisanie układu równań, np.

$$\begin{cases} a = b + 7 \\ \frac{1}{2}ab = 60 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} b = a - 7 \\ \frac{1}{2}ab = 60 \end{cases}$$

gdzie a i b oznaczają długości przyprostokątnych i zdający na tym poprzestanie.

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego

ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl

Uwaga: Jeżeli zdający zapisze układ równań bez współczynnika $\frac{1}{2}$ we wzorze na pole trójkąta i na tym poprzestanie, to otrzymuje 0 punktów.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**
Zapisanie równania z jedną niewiadomą z uwzględnieniem wzoru na pole trójkąta, np. $\frac{1}{2}b(b+7)=60$ lub $\frac{1}{2}a(a-7)=60$ i na tym zdający poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Uwaga: Jeżeli zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą w postaci $b(b+7)=60$ lub $a(a-7)=60$ (tzn. pominie współczynnik $\frac{1}{2}$ we wzorze na pole trójkąta) i na tym poprzestanie, to otrzymuje 1 punkt.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... **3 pkt**
Obliczenie długości przyprostokątnej a lub b: $a=15$ lub $b=8$ i na tym zdający poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie bezbłędne .... **4 pkt**
Obliczenie długości przeciwprostokątnej: 17.

Uwaga: Jeżeli zdający rozwiąże równanie kwadratowe zapisane w postaci $b(b+7)=60$ lub $a(a-7)=60$ (pominięty współczynnik $\frac{1}{2}$ we wzorze na pole trójkąta) i otrzyma długość przeciwprostokątnej równą 13, to rozwiązanie to kwalifikujemy do kategorii „Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)” i przyznajemy 3 punkty.

Inne sposoby rozwiązania polegały na:

- ułożeniu od razu równania z jedną niewiadomą oznaczającą krótszą lub dłuższą przyprostokątną (sposób II);
- zastosowaniu wzoru Herona do obliczenia pola trójkąta, ułożeniu równania z dwiema niewiadomymi (oznaczającymi jedną z przyprostokątnych i przeciwprostokątną) i zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa do wyeliminowania jednej niewiadomej (sposób III);
- skorzystaniu z własności wysokości trójkąta prostokątnego, poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego (jej kwadrat jest równy iloczynowi długości odcinków, na które dzieli ona przeciwprostokątną) i skorzystaniu z twierdzenia Pitagorasa (sposób IV).

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego

ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. (022) 531-75-31
tel./fax (022) 531-75-46
www.cke-efs.pl