

## 12. RÓWNANIA LAGRANGE`A II rodzaju

a. Równania Lagrange`a II rodzaju w polu niezachowawczym mają postać

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_j} = Q_j \quad (12.1)$$

gdzie:  $q_j$  – współrzędna uogólniona

$\dot{q}_j$  – prędkość uogólniona

$E$  – energia kinetyczna układu

$Q_j$  – siła uogólniona

Siłę uogólnioną wyznacza się z zasady prac przygotowanych we współrzędnych uogólnionych

$$\delta L = Q_j \cdot \delta q_j \quad (12.2)$$

Dla układów znajdujących się w polu potencjalnym sił równania (12.1) zapisuje się w postaci

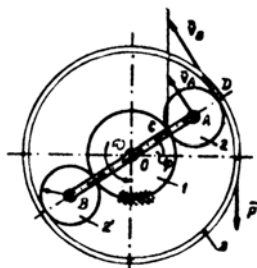
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial W}{\partial q_j} = 0 \quad (12.3)$$

gdzie:  $W = E - V$  – potencjał kinetyczny (funkcja Lagrange`a)

$V$  – energia potencjalna układu

### Przykład

Jarzmo AB – będące jednorodnym prętem o długości  $2l$  i masie  $m$  obraca się wokół osi  $O$  nieruchomego koła 1 pod działaniem pary sił o momencie  $\bar{M}$ . Wprowadzamy w ruch jednakowe koła 2 i 2' o promieniu  $r$  oraz masie  $m_2 = m$  każde. Koła te zazębiają się z nieruchomym kołem 1 wprowadzając w ruch koło 3 o masie  $m_3 = \frac{5}{3}m$ . Na obwodzie koła 3 przyłożona jest siła oporu  $\bar{P}$ . Wyznaczyć wartość przyspieszenia  $\bar{\varepsilon}$  jarzma, jeżeli koła 2 i 2' są jednorodnymi krążkami, masa zazębiającego się z nimi koła 3 jest równomiernie rozłożona na jego obwodzie (rys. 36).



Rys. 36

### Rozwiązanie

Położenie tego mechanizmu można wyznaczyć za pomocą jednej współrzędnej uogólnionej  $\varphi$  obrotu jarzma. W związku z tym równanie (12.1) przyjmie postać

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi} = Q$$

Energia kinetyczna układu jest równa

$$E = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + 2 \left( \frac{1}{2} m_2 v_A^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 \right) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

gdzie:  $I_0$ ,  $I_3$  – momenty bezwładności jarzma i koła 3 względem osi 0, zaś  $I_2$  – moment bezwładności koła 2 względem osi A

$$v_A = \omega \cdot OA = \omega \cdot l, \quad \omega_2 = \frac{v_A}{CA} = \frac{\omega l}{r}$$

$$v_D = 2 v_A = 2 \omega \cdot l, \quad \text{skąd} \quad \omega_3 = \frac{v_D}{OD} = \frac{2 \omega l}{l+r}$$

$$I_0 = \frac{m (AB)^2}{12} = \frac{m l^2}{3}, \quad I_2 = \frac{m_2 r^2}{2} = \frac{m r^2}{2}$$

$$I_3 = m_3 (OD)^2 = \frac{5}{3} m (l+r)^2$$

Podstawiając te związki do wzoru na energię kinetyczną otrzymamy

$$E = \frac{m l^2}{6} \omega^2 + m \omega^2 l^2 + \frac{m r^2}{2} \frac{\omega^2 l^2}{r^2} + \frac{5}{6} m (l+r) \frac{4 \omega^2 l^2}{(l+r)^2}$$

$$E = 5 l^2 \dot{\varphi}^2 m$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 10 \cdot l^2 m \dot{\varphi} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 10 \cdot l^2 m \ddot{\varphi} = 10 \cdot l^2 m \varepsilon$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0 \text{ ponieważ } E \text{ nie zależy od } \varphi$$

Przy obrocie jarzma o przesunięcie wirtualne  $\delta\varphi$  suma prac sił działających na układ jest równa

$$\delta L = M \delta\varphi - P (l + r) \delta\varphi_3$$

$$\delta\varphi_3 = \frac{2l}{l+r} \delta\varphi$$

dlatego

$$\delta L = M \delta\varphi - P (l + r) \frac{2l}{l+r} \delta\varphi = (M - 2Pl) \delta\varphi$$

skąd

$$Q = \frac{\delta L}{\delta\varphi} = M - 2Pl$$

Podstawiając te wyrażenia do równania Lagrange'a otrzymamy

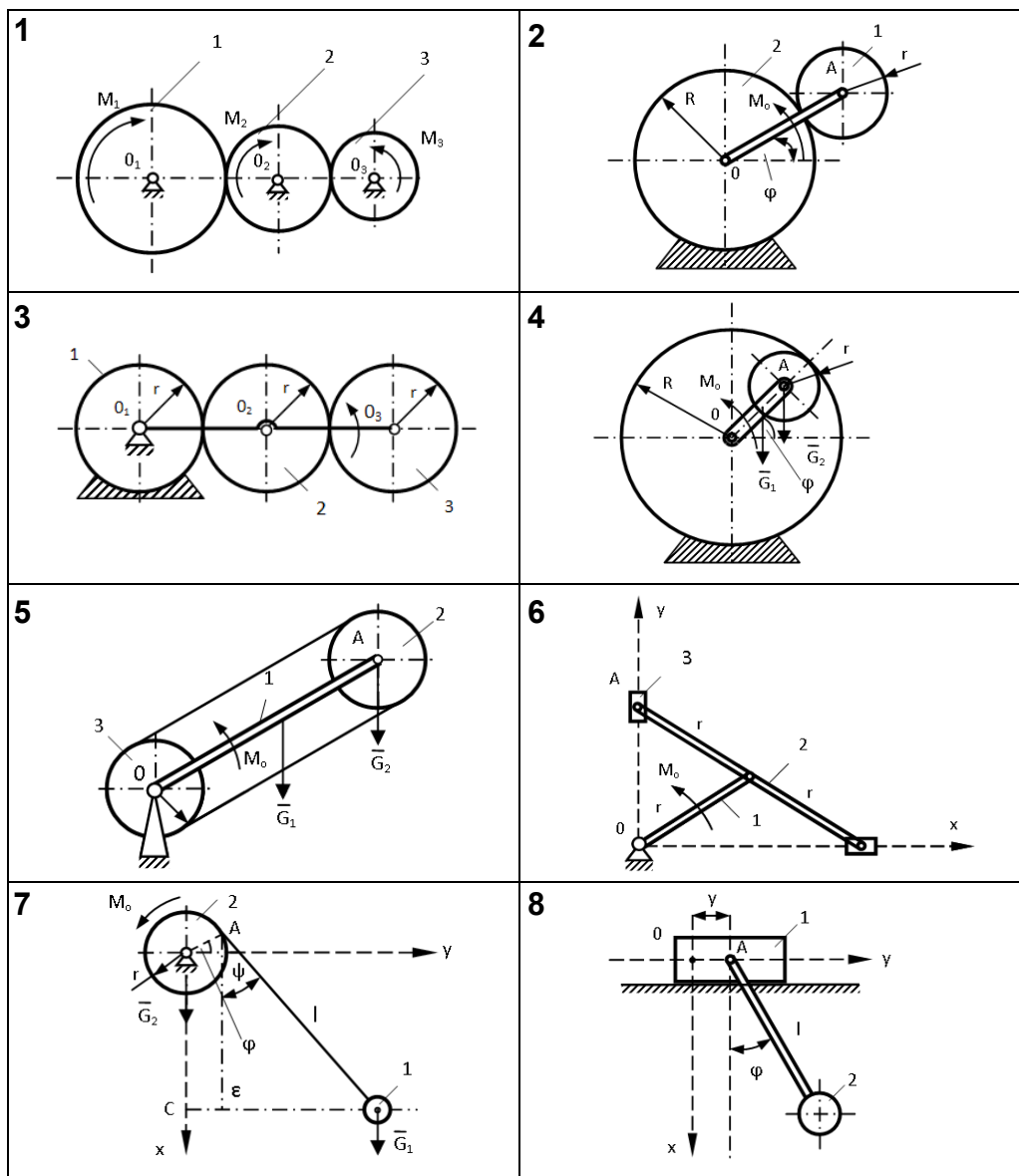
$$10 m l^2 \varepsilon = M - 2Pl \quad \text{skąd} \quad \varepsilon = \frac{M - 2Pl}{10 m l^2}$$

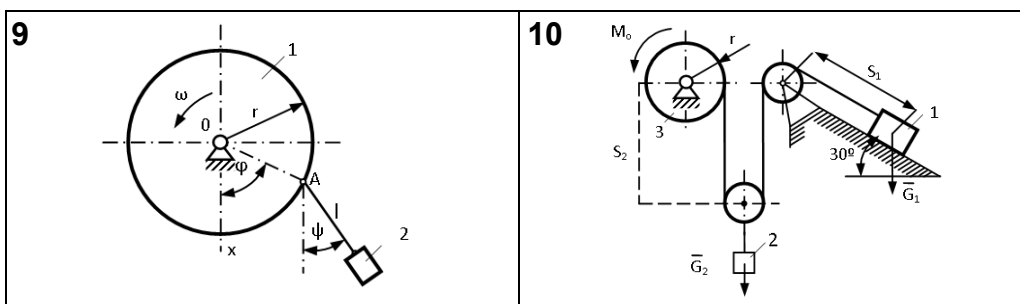
### 12.1. Równania Lagrange'a II rodzaju

Dla układów mechanicznych pokazanych na rys. 1 ÷ 10, str. 163 korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju, wyznaczyć wartość przyspieszenia kątownego (wariant 1 ÷ 6), równania ruchu (wariant 7 ÷ 10). W wariacie 10 wyznaczyć dodatkowo wartość przyspieszeń ciała 1 i 2. Dane do obliczeń zestawiono w tabeli.

Nr rys.	Masa			Moment		Długość		Dane dodatkowe
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$M_0$	$M_1$	$r$	$l$	
1	3m	2m	m	-	M	-	-	$M_2, M_3, r_1, r_2, r_3$
2	m	2m		$M_0$	-	r	-	$R = 2r$
3	m	m	m	$M_0$	-	r	-	-
4	m	m		$M_0$	-	r	-	$R = 2r$
5	m	2m	2m	$M_0$	-	r	$0A = l$	-
6	m	2m	m	$M_0$	-	r	-	$m_4 = m$

7	m	2m	-	$M_0$	-	r	-	-
8	2m	m	-	-	-	-	-	-
9	4m	m	-	-	-	r	-	-
10	4m	2m	2m	$M_0$	-	r	-	-





### 15.3. Odpowiedzi

#### Ad. 12.1. Równania Lagrange'a II rodzaju

$$\text{Ad 1)} \quad \varepsilon_1 = \frac{M_1 - \frac{r_1}{r_2} M_2 - \frac{r_1}{r_2} M_3}{3 m r_1^2}$$

$$\text{Ad 2)} \quad \varepsilon = \frac{M_0}{25 m r^2}$$

$$\text{Ad 3)} \quad \varepsilon = \frac{M}{22 m r^2}$$

$$\text{Ad 4)} \quad \varepsilon = \frac{6 M_0 - 3 (m_1 + 2 m_2) g (R - r) \cos \varphi}{2 m_1 + 9 m_2}$$

$$\text{Ad 5)} \quad \varepsilon = \frac{3 M_0}{(m_1 + 3 m_2) l^2}$$

$$\text{Ad 6)} \quad \varepsilon = \frac{M_0}{(3 m_1 + 4 m_2) r^2}$$

$$\text{Ad 7)} \quad 2 m r^2 \ddot{\varphi} + m r (l_0 - r \varphi + r \psi) \dot{\psi}^2 + M - G \cdot r \cos \psi \\ (l_0 - r \varphi + r \psi) \ddot{\psi} + r (\dot{\psi} - 2 \dot{\varphi}) \dot{\psi} = -g \sin \varphi$$

$$\text{Ad 8)} \quad \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) \dot{y} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi] = 0 \\ l \ddot{\varphi} + \ddot{y} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0$$

$$\text{Ad 9)} \quad \ddot{\psi} - \omega^2 \frac{r}{l} \sin(\omega t - \psi) + \frac{g}{l} \sin \psi = 0$$

$$\text{Ad 10)} \quad \left. \begin{aligned} (G_1 + 0,5 G_3) \ddot{s}_1 + G_3 \ddot{s}_2 &= (G_1 \sin \alpha - \frac{M_0}{r}) g \\ G_3 \ddot{s}_1 + (G_2 + 2 G_3) \ddot{s}_2 &= \left( G_2 - 2 \frac{M_0}{r} \right) g \end{aligned} \right\} \\ \ddot{s}_1 = \frac{3}{13} g, \quad \ddot{s}_2 = -\frac{1}{13} g$$