

2. PŁASKI UKŁAD SIŁ

Warunek równowagi płaskiego dowolnego układu sił można zapisać w jednej z następujących postaci:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{i0}(\bar{P}_i) = 0 \quad (2.1)$$

przy czym za biegun 0 przyjmuje się dowolny punkt na płaszczyźnie.

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iA}(\bar{P}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iB}(\bar{P}_i) = 0 \quad (2.2)$$

W tym przypadku odcinek AB łączący bieguny A i B, względem których obliczamy algebraiczną sumę momentów, nie może być prostopadły do osi prętów

$$\sum_{i=1}^n M_{iA}(\bar{P}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iB}(\bar{P}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iC}(P_i) = 0 \quad (2.3)$$

w tym przypadku bieguny A, B i C nie mogą leżeć na jednej prostej

Jeżeli wszystkie siły są do siebie równoległe, to warunek równowagi można zapisać w jednej z dwóch postaci:

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{i0}(\bar{P}_i) = 0 \quad (2.4)$$

gdzie: oś z jest równoległa do sił

$$\sum_{i=1}^n M_{iA}(\bar{P}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iB}(\bar{P}_i) = 0 \quad (2.5)$$

przy czym odcinek AB łączący bieguny A i B nie może być równoległy do sił.

Jeżeli na ciało nałożono więzy z tarciem, to do równań równowagi z uwzględnieniem sił tarcia należy dodać równanie dodatkowe

$$T = \mu N \quad (2.6)$$

gdzie: μ - współczynnik tarcia rozwiniętego
 $[N]$ – wartość reakcji normalnej

Przykład 3

Jednorodna pozioma belka AB o długości 6 m i ciężarze $G_1 = 2400$ [N] zamocowana jest przegubowo w punkcie A, opierając się swobodnie w punkcie C na belce CD o długości 5 m i ciężarze $G_2 = 3200$ [N]. Belka CD w punkcie D zamocowana jest przegubowo i podwieszona linką KE do pionowej ściany. Mamy dane $DE = 2$ m, $\alpha = \beta = 60^\circ$ oraz siłę działającą \vec{P} na punkt B o wartości $P = 1200$ [N]. Znaleźć reakcje w punkcie A, D, C i E (rys. 3a, str. 22)

Rozwiązanie

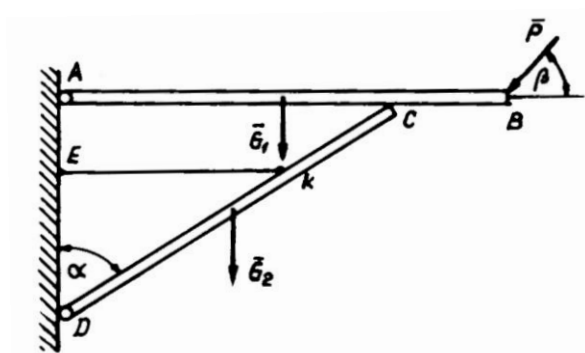
Aby wyznaczyć reakcje w punktach A, D, C, E (6 niewiadomych), musimy rozdzielić obie belki i rozpatrzyć równowagę sił działających na każdą z belek z osobna.

Dla sił działających na belkę AB (rys. 3b) mamy

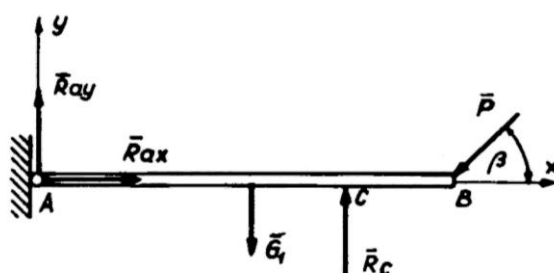
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 P_{ix} &= 0 \rightarrow R_{Ax} - P \cos \beta = 0 \\ \sum_{i=1}^5 P_{iy} &= 0 \rightarrow R_{Ay} - G_1 + R_C - P \sin \beta = 0 \\ \sum_{i=1}^5 M_{iA}(\vec{P}_i) &= 0 \rightarrow -P_1 \frac{AB}{2} + R_C \cdot CD \sin \alpha - P \cdot AB \sin \beta = 0 \end{aligned}$$

dla sił działających na belkę CD (rys.3c) mamy:

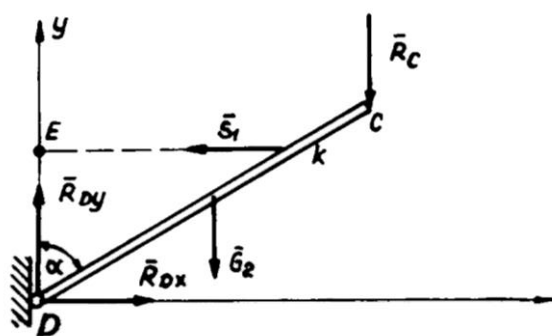
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 P_{ix} &= 0 \rightarrow R_{Dx} - S = 0 \\ \sum_{i=1}^5 P_{iy} &= 0 \rightarrow R_{Dy} - R_C - G_2 = 0 \end{aligned}$$



Rys. 3a



Rys. 3b



Rys. 3c

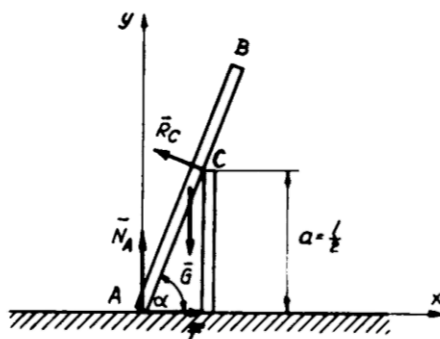
$$\sum_{i=1}^5 M_{iD}(\bar{P}_1) = 0 \rightarrow -P_2 \frac{CD}{2} \sin \alpha + S \cdot DE - R_C \cdot CD \sin \alpha = 0$$

z tych równań znajdujemy

$$R_{Ax} = 600 \text{ [N]}, \quad R_{Ay} = 337,2 \text{ [N]}, \quad R_C = 3100,8 \text{ [N]}, \\ R_{Dx} = S = 10,17 \text{ [kN]}, \quad R_{Dy} = 6,3 \text{ [kN]}$$

Przykład 4

Belka AB o długości l opiera się końcem A na poziomej płaszczyźnie, a w punkcie C na gładkiej pionowej podporze o wysokości $a = \frac{1}{2}l$ (rys. 4, str. 23). Znaleźć najmniejszą wartość współczynnika tarcia między belką a płaszczyzną, przy którym możliwa jest równowaga sił działających na belkę, jeżeli kąt $\alpha = 60^\circ$



Rys. 4

Rozwiązanie

W miejsce więzów wstawiamy odpowiednie reakcje jak na rysunku 4. Rozpatrujemy równowagę sił działających na belkę AB oznaczając jej ciężar przez G .

$$\sum_{i=1}^4 P_{ix} = 0 \rightarrow T - R_C \sin \alpha = 0$$

$$\sum_{i=1}^4 P_{iy} = 0 \rightarrow N_A - G + R_C \cos \alpha = 0$$

$$\sum_{i=1}^4 M_{iA}(\bar{P}_i) = 0 \rightarrow -G \frac{l}{2} \cos \alpha + R_C \cdot AC = 0$$

skąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} R_C &= G \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha, & T &= G \cdot \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha, \\ N_A &= G - G \cdot \cos^2 \alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

Warunek równowagi przy występującej sile tarcia

$$T = \mu N_A$$

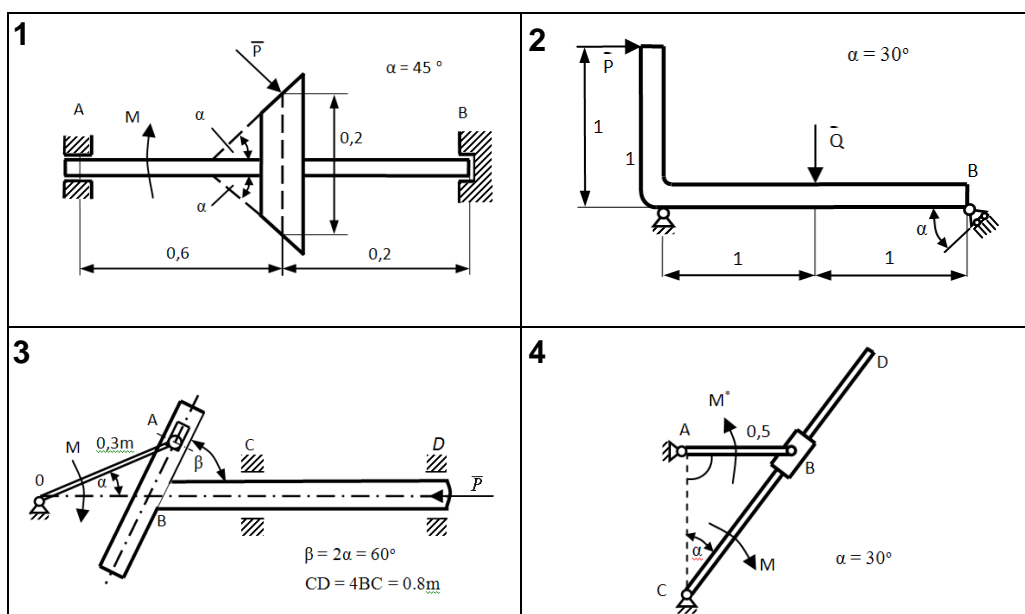
Skąd

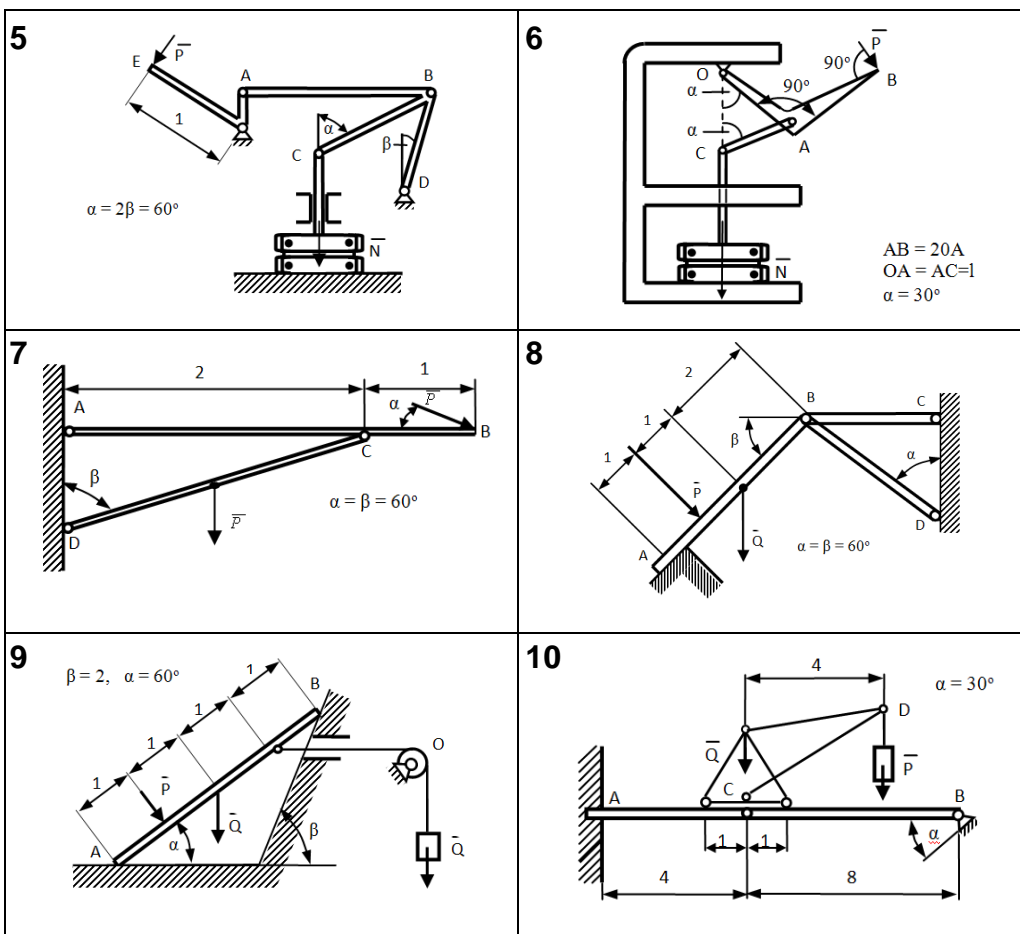
$$\mu \geq \frac{\cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha} ; \quad \mu \geq 0,48$$

2.1. Płaski dowolny układ sił

Wyznaczyć reakcje więzów prostych konstrukcji, których schematy pokazano na rys. 1 – 10, str. 25 oraz konstrukcji złożonych rys. 11 – 20, str. 26 (wymiary na rysunkach podano w [m]). Dane do obliczeń zestawiono w tabeli.

Numer rysunku	[kN]		[kNm]	[kN/m]	Szukane
	P	Q	M	q	
1	2	-	$1,6 \sqrt{2}$	-	R_A, R_B
2	4	8	-	-	R_A, R_B
3	2	-	-	-	M, R_C, R_D
4	-	-	2	-	M^*, R_A, R_C
5	0,5	-	-	-	[N]
6	2	-	-	-	[N]
7	2	2	-	-	R_A, R_D
8	4	4	-	-	R_A, R_C, R_D
9	4	4	-	-	R_A, R_B, R_0
10	1	5	-	-	R_A, R_B, M_A



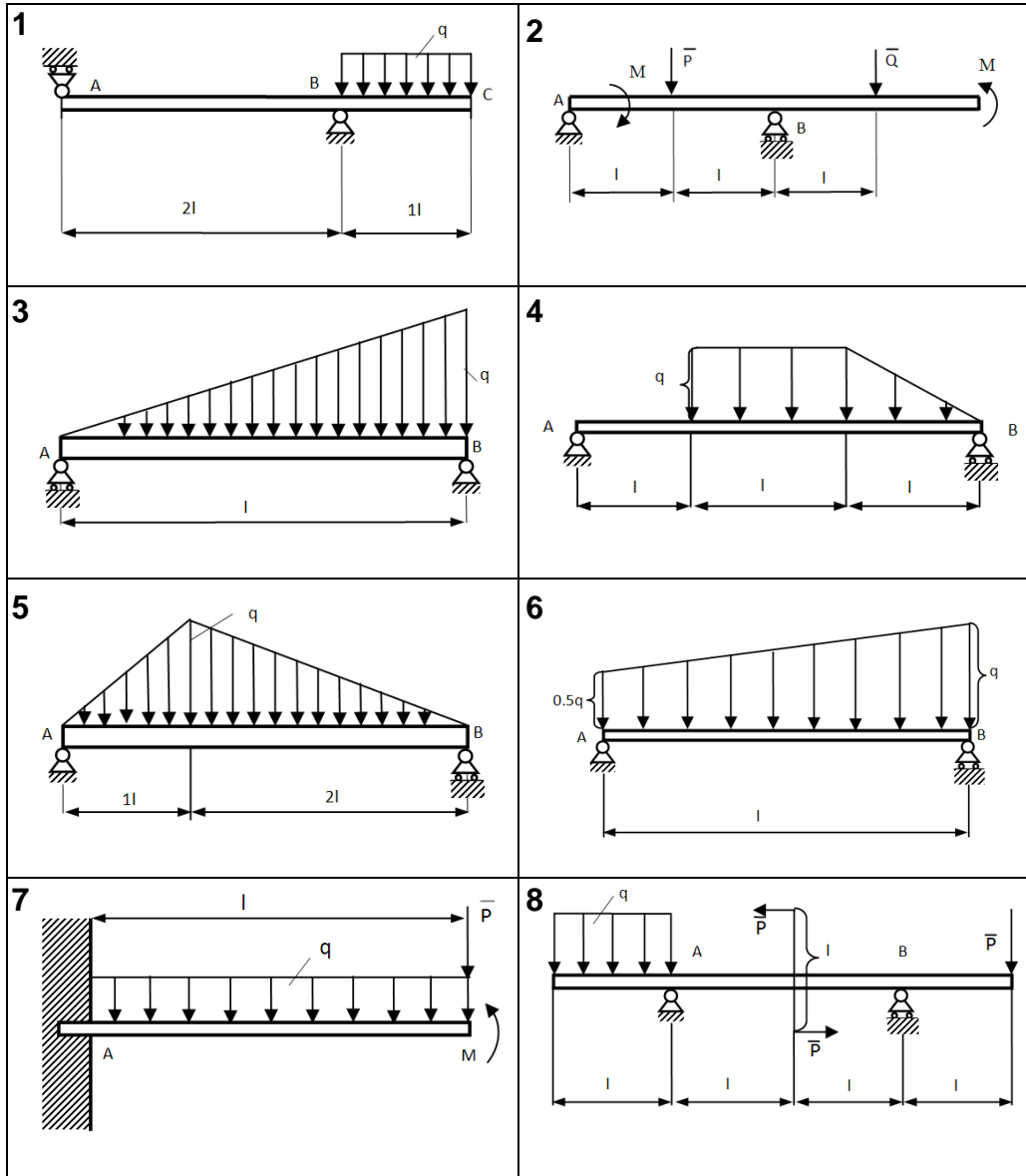


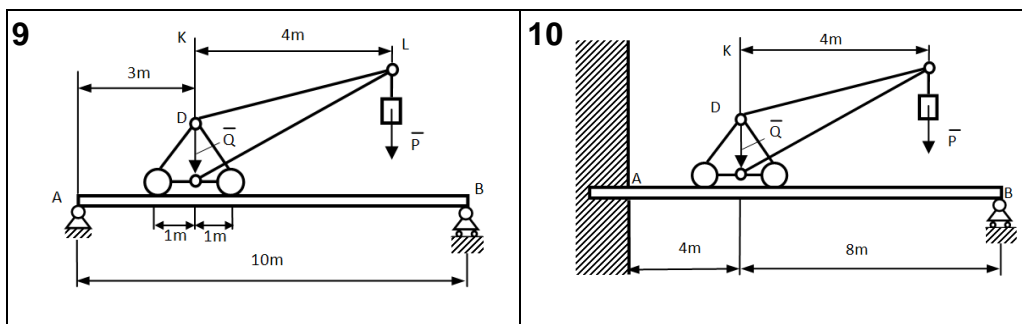
2.2 Płaski układ sił równoległych

Wyznaczyć reakcje więzów konstrukcji, których schematy pokazano na rys. 1 – 20, str. 28,29. Obciążenia zestawiono w tabeli

Numer rysunku	[kN]		[kN/m]	[kN/m]	[m]	Szukane
	P	Q	q	M	l	
1	-	-	2	-	1,0	R_A, R_B
2	2	4	-	3	1,0	R_A, R_B
3	-	-	4	-	2,0	R_A, R_B
4	-	-	4	-	2,0	R_A, R_B
5	-	-	4	-	1,0	R_A, R_B
6	-	-	6	-	4,0	R_A, R_B
7	2	-	3	2	2,0	R_A, R_B, M_A
8	4	-	2	-	1,0	R_A, R_B

9	1	5	-	-	-	R_A, R_B, M_A
10	1	5	-	-	-	R_A, R_B, M_A

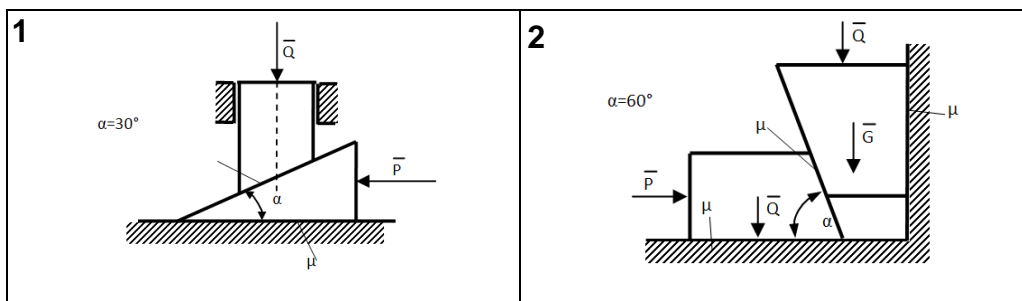


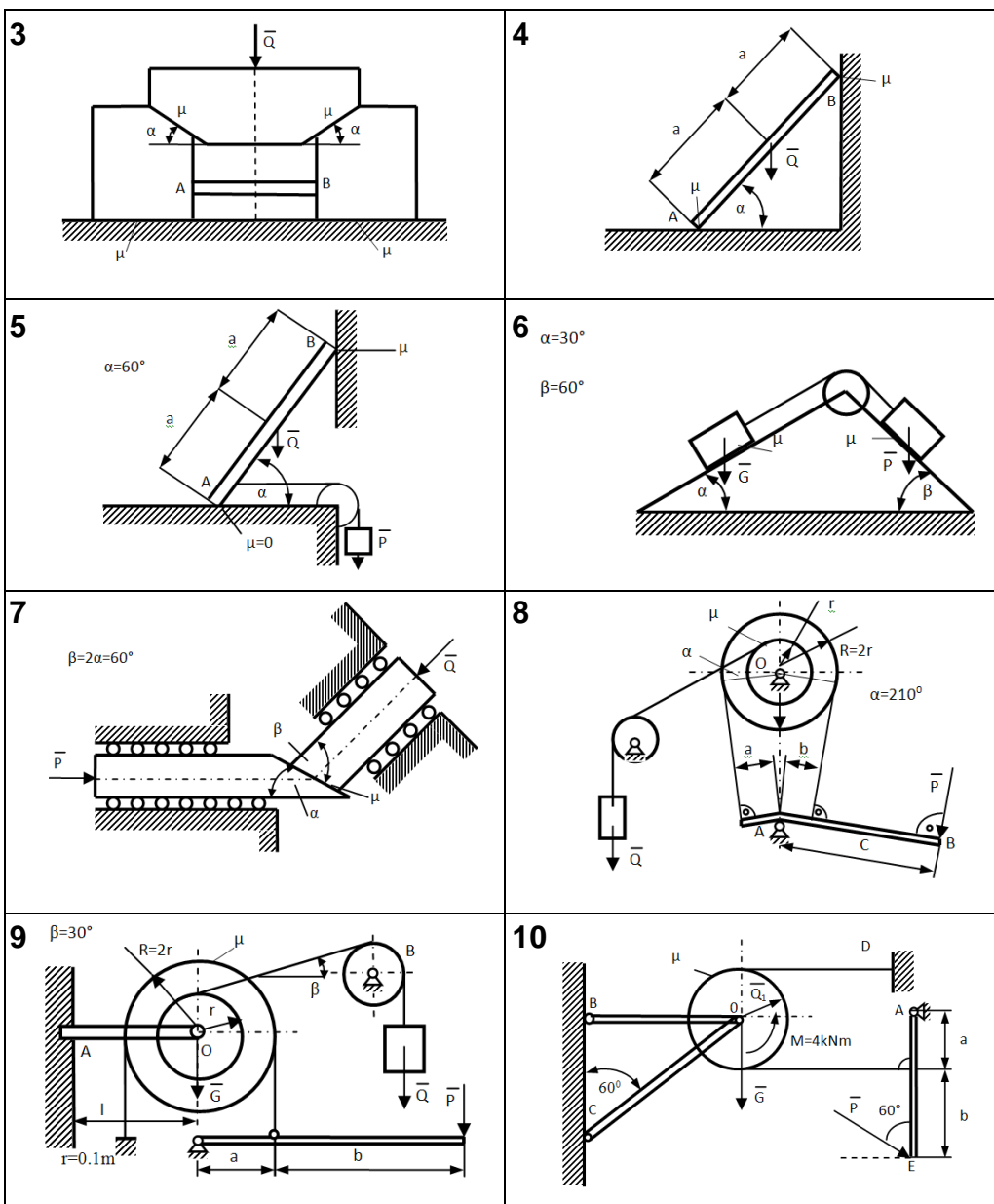


2.3. Tarcie

Wyznaczyć minimalne wartości siły P , aby układ sił był w równowadze oraz reakcje więzów konstrukcji, których schematy pokazano na rys. 1 - 20, str. 31 – 32. Dane do obliczeń zestawiono w tabeli

Numer rysunku	[kN]		[m]			Współczynnik tarcia spoczynkowego	Szukane
	G	Q	a	b	c		
1	-	2	-	-	-	0,2	P
2	2	4	-	-	-	0,15	P
3	-	10	-	-	-	0,15	S_{AB}
4	2	-	2	-	-	0,2	$R_A, R_B?$
5	2	-	1	-	-	0,2	P, R_A, R_B
6	2	-	-	-	-	0,1	P
7	-	2	-	-	-	0,25	P
8	2	10	0,2	0,4	1,2	0,2	P
9	2	6	0,2	1,0	-	0,2	P, R_A, M_A
10	2	-	0,2	1,0	-	0,2	P, R_B, R_C





2.4. Odpowiedzi

Ad 2.1. Płaski dowolny układ sił

Ad 1) $R_A = 0,18 \text{ [kN]}$ $R_B = 1,9 \text{ [kN]}$

Ad 2) $R_A = 2,07 \text{ [kN]}$ $R_B = 4,3 \text{ [kN]}$

Ad 3) $M = 0,6 \text{ [kNm]}$

- Ad 4) $R_A = R_C = 2,0 \text{ [kN]}$ $M^* = 0,5 \text{ [kNm]}$
 Ad 5) $[N] = 4,33 \text{ [kN]}$
 Ad 6) $[N] = 2,3 \text{ [kN]}$
 Ad 7) $R_A = 13,0 \text{ [kN]}$ $R_D = 8,0 \text{ [kN]}$
 Ad 8) $R_A = 4,0 \text{ [kN]}$ $R_C = 1,0 \text{ [kN]}$ $R_D = 0,86 \text{ [kN]}$
 Ad 9) $R_A = 5,3 \text{ [kN]}$ $R_B = 4,9 \text{ [kN]}$ $R_0 = 4,2 \text{ [kN]}$
 Ad 10) $R_A = 5,3 \text{ [kN]}$ $R_B = 10,8 \text{ [kN]}$ $M_A = 20,2 \text{ [kNm]}$

Ad 2.2. Płaski układ sił równoległych

- Ad 1) $R_A = 0,5 \text{ [kN]}$ $R_B = 2,5 \text{ [kN]}$
 Ad 2) $R_A = 1,5 \text{ [kN]}$ $R_B = 5,5 \text{ [kN]}$
 Ad 3) $R_A = 4/3 \text{ [kN]}$ $R_B = 8/3 \text{ [kN]}$
 Ad 4) $R_A = 4,9 \text{ [kN]}$ $R_B = 7,1 \text{ [kN]}$
 Ad 5) $R_A = 2,44 \text{ [kN]}$ $R_B = 3,55 \text{ [kN]}$
 Ad 6) $R_A = 8 \text{ [kN]}$ $R_B = 10 \text{ [kN]}$
 Ad 7) $R_A = 8 \text{ [kN]}$ $M_A = 8 \text{ [kNm]}$
 Ad 8) $R_A = 2,5 \text{ [kN]}$ $R_B = 3,5 \text{ [kN]}$
 Ad 9) $R_A = 37,1 \text{ [kN]}$ $R_B = 14,2 \text{ [kN]}$
 Ad 10) $R_A = 49,625 \text{ [kN]}$ $R_B = 4,375 \text{ [kN]}$ $M_A = 179,5 \text{ [kN]}$

Ad 2.3. Tarcie

- Ad 1) $P = 0,28 \text{ [kN]}$
 Ad 2) $P = 5,27 \text{ [kN]}$
 Ad 3) $S_{AB} = 5,75 \text{ [kN]}$
 Ad 4) $R_A = 1,9 \text{ [kN]}$ $R_B = 0,38 \text{ [kN]}$ $\alpha = 67^\circ$
 Ad 5) $P = 0,65 \text{ [kN]}$ $R_A = 1,87 \text{ [kN]}$ $R_B = 0,65 \text{ [kN]}$
 Ad 6) $P = 78,1 \text{ [kN]}$
 Ad 7) $P = 1,46 \text{ [kN]}$
 Ad 8) $P = 2,44 \text{ [kN]}$
 Ad 9) $P = 0,57 \text{ [kN]}$ $R_A = 10,27 \text{ [kN]}$ $M_A = 9,16 \text{ [kN]}$
 Ad 10) $P = 8,81 \text{ [kN]}$ $R_B = 133,53 \text{ [kN]}$ $R_C = 2,83 \text{ [kN]}$