

### 3. PRZESTRZENNY UKŁAD SIŁ

Przestrzenny dowolny układ sił może być w ogólności zredukowany do jednej siły  $\bar{W}_g$  (wektora głównego), równej sumie geometrycznej wszystkich sił, przyłożonej w dowolnym biegunie redukcji 0 i do jednej pary sił, której moment  $\bar{M}_g$  nazywamy momentem głównym, równym geometrycznej sumie momentów sił względem tego bieguna:

$$\bar{W}_g = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i \quad \bar{M}_g = \sum_{i=1}^n \bar{M}_{i0}(\bar{P}_i) \quad (3.1)$$

Szczególne przypadki redukcji

- a) Jeżeli  $\bar{W}_g \neq 0$ ,  $\bar{M}_g = 0$  lub  $\bar{M}_g \perp \bar{W}_g$  układ sił redukuje się do wypadkowej
- b) Jeżeli  $\bar{W}_g = 0$ ,  $\bar{M}_g \neq 0$  - układ sił redukuje się do pary sił
- c) Jeżeli  $\bar{W}_g \neq 0$ ,  $\bar{M}_g \neq 0$  i wektory nie są do siebie prostopadłe – układ sił redukuje się do skrętnika. Równanie osi skrętnika ma postać (3.2). Jeżeli  $M_g^* = 0$ , równanie (3.2) przechodzi w równanie prostej działania wypadkowej

$$\begin{aligned} \frac{M_g^*}{W_g} &= \frac{M_{gx} - (yW_{gz} - zW_{gy})}{W_{gx}} = \frac{M_{gy} - (zW_{gx} - xW_{gz})}{W_{gy}} \\ &= \frac{M_{gz} - (xW_{gy} - yW_{gx})}{z} \end{aligned} \quad (3.2)$$

gdzie:  $M_g^* = W_g \cdot M_g \cos(\bar{W}_g, \bar{M}_g)$ ;  $W_g = \sqrt{W_{gx}^2 + W_{gy}^2 + W_{gz}^2}$

- d) Jeżeli  $\bar{W}_g = 0$ ,  $\bar{M}_g = 0$  – układ sił pozostaje w równowadze

Analityczny warunek równowagi ma postać

$$W_{gx} = \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \quad M_{gx} = \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0$$

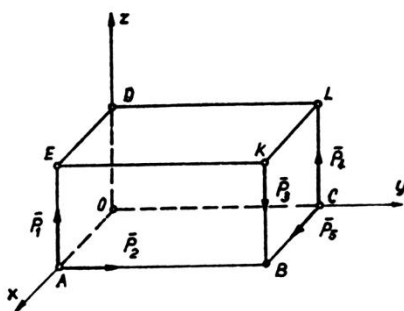
$$\begin{aligned}
 W_{gy} &= \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 & M_{gy} &= \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0 \\
 W_{gz} &= \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0 & M_{gz} &= \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Jeżeli na bryłę działa przestrzenny układ sił równoległych, to przyjmując, że oś  $Oz$  jest równoległa do tych sił, otrzymamy następujący warunek równowagi:

$$W_{gz} = \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0 \quad M_{gz} = \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0 \quad M_{gy} = \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0 \quad (3.4)$$

### Przykład 5

Zredukować do prostszej postaci układ sił  $P_1, P_2, P_3, P_4$  i  $P_5$  przyłożonych w wierzchołkach  $A, K$  i  $C$  prostopadłościanu jak na rysunku 5, str. 37.  $P_1 = P_3 = P_4 = P$ ,  $P_2 = 2P$ ,  $OC = a$ ,  $OA = \frac{a}{2}$



Rys. 5

### Rozwiązanie

$$W_{gx} = P_5 = P \quad W_g = \sqrt{W_{gz}^2 + W_{gy}^2 + W_{gx}^2} = 6P$$

$$W_{gy} = P_2 = 2P$$

$$W_{gz} = P_1 - P_3 + P_4 = P$$

$$M_{gx} = -P_3 a + P_4 a = 0$$

$$M_{gy} = P_3 \frac{a}{2} - P_1 \frac{a}{2} = 0$$

$$M_{gz} = P_2 \frac{a}{2} - P_5 a = 0$$

Układ sił redukuje się do wypadkowej przechodzącej przez obrany biegun redukcji 0, przy czym  $W = W_g = 6 P$

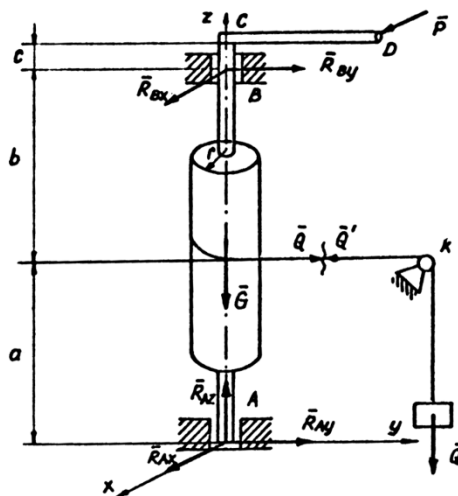
$$\frac{-y W_{gz} + z W_{gx}}{W_{gx}} = \frac{-z W_{gx} + x W_{gz}}{W_{gy}} = \frac{-x W_{gy} + yx}{W_{gz}} = 0$$

$$\frac{2z - y}{1} = \frac{x - z}{2} = \frac{y - 2x}{1} = 0$$

Jest to równanie prostej działania wypadkowej.

### Przykład 6

Bryłę o ciężarze  $Q = 500$  [N] można podnosić za pomocą pionowego bloku (rys. 6, str. 38). Wyznaczyć poziomą siłę  $P$ , przyłożoną do dźwigni bloku CD, oraz reakcje w łożyskach A i B w przypadku równowagi sił, jeżeli ciężar bloku wynosi:  $G = 200$  [N].



Rys. 6

## Rozwiązanie

Odcinając więzy wstawiamy w ich miejsce odpowiednie siły reakcji. Równania równowagi sił mają postać

$$\sum_{i=1}^8 P_{ix} = 0 \rightarrow R_{AX} + R_{Bx} + P = 0$$

$$\sum_{i=1}^8 P_{iy} = 0 \rightarrow R_{Ay} + R_{By} + Q = 0$$

$$\sum_{i=1}^8 P_{iz} = 0 \rightarrow R_{Az} - G = 0$$

$$\sum_{i=1}^8 M_{ix} = 0 \rightarrow -Q \cdot 25 - R_{By} \cdot 60 = 0$$

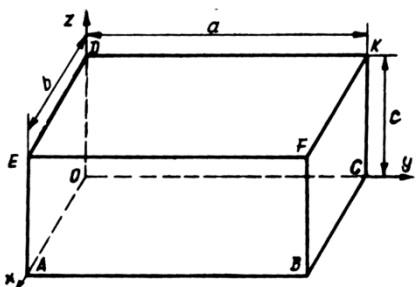
$$\sum_{i=1}^8 y = 0 \rightarrow R_{Bx} \cdot 60 + P \cdot 75 = 0$$

$$\sum_{i=1}^8 M_{iz} = 0 \rightarrow Q \cdot 10 - P \cdot 50 = 0$$

Skąd otrzymano

$$\begin{aligned} P &= 100 \text{ [N]}, & R_{AX} &= 25 \text{ [N]}, & R_{AY} &= 291,7 \text{ [N]}, & R_{AZ} &= 200 \text{ [N]} \\ R_{BX} &= -125 \text{ [N]}, & R_{BY} &= -208,3 \text{ [N]} \end{aligned}$$

### 3.1. Redukcja przestrzennego, dowolnego układu sił



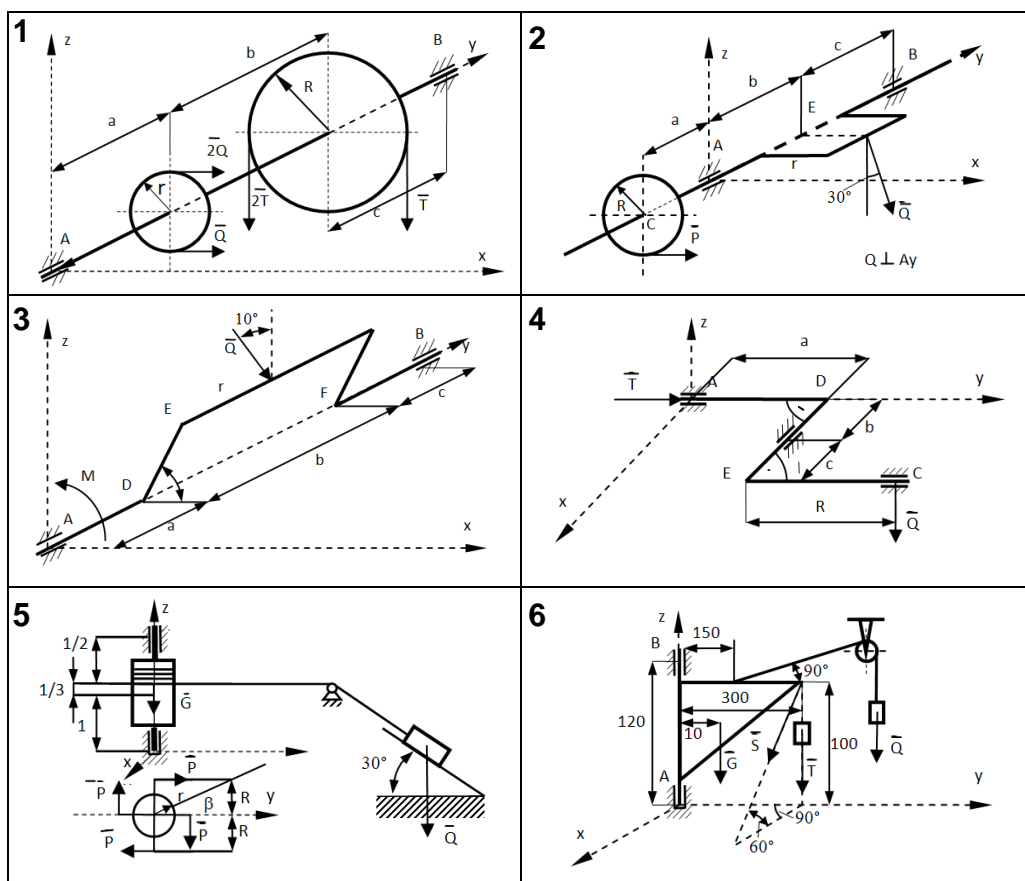
Wyznaczyć wektor główny i moment główny zadanego układu sił względem bieguna redukcji) i zbadać do czego ten układ sił się zredukuje. Wymiary prostopadłościanu, a także wartości i proste działania sił podano w tabeli

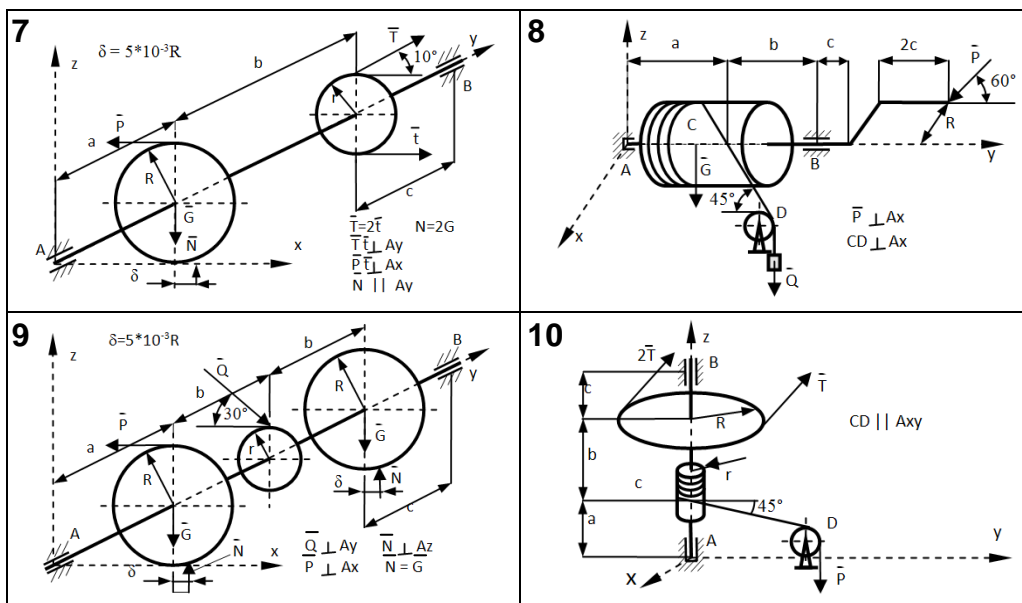
Nr rys	Wymiary prostopadłościanu (cm)			Siły układu											
				F <sub>1</sub>			F <sub>2</sub>			F <sub>3</sub>			F <sub>4</sub>		
	a	b	c	Wartość [N]	Punkt przyłożenia	Kierunek	Wartość [N]	Punkt przyłożenia	Kierunek	Wartość [N]	Punkt przyłożenia	Kierunek	Wartość [N]	Punkt przyłożenia	Kierunek
1	60	30	20	4	A	AE	10	C	CB	10	D	DK	-	-	-
2	30	40	40	6	D	DO	10	K	KF	14	B	BK	10	K	KC
3	20	10	10	10	E	BD	10	K	KF	8	O	OA	8	B	BC
4	30	40	20	15	O	OC	20	K	KC	-	-	-	-	-	-
5	20	20	20	10	O	OD	10	K	KD	10	K	KC	10	B	BO
6	30	40	20	8	A	AO	8	E	EF	8	F	FB	10	D	DK
7	30	40	40	10	B	BK	10	C	CO	20	D	DF	-	-	-
8	40	30	10	10	O	OA	10	B	BF	10	D	DK	-	-	-
9	30	40	30	10	A	AC	20	K	KB	-	-	-	-	-	-
10	10	10	30	20	A	AC	20	O	OD	20	K	KE	20	E	EA

### 3.2. Przestrzenny dowolny układ sił – równowaga

Wyznaczyć reakcje więzów konstrukcji, których schematy pokazano na rysunkach 1 – 14, str. 42, 43 oraz siły w prętach konstrukcji (rys. 15 – 20, str. 43) podtrzymujących poziomą jednorodną płytę o ciężarze  $G$ , przy działaniu na nią siły  $Q$  wzdłuż  $AB$ . Pręty  $SA$  zamocowane przegubowo. Dane do obliczeń zestawiono w tabeli. Przyjąć, że w wariantach 16 i 18 zawiasy nie pozwalają na przesunięcie płyty wzdłuż osi  $AB$ .

Nr rys.	[kN]			[cm]					Szukane
	Q	T	G	a	b	c	R	r	
1	2	-	-	20	40	10	20	10	$R_A, R_B, T$
2	20	-	-	15	20	25	20	15	$P, R_A, R_B$
3	30	-	-	40	40	40	-	20	$M, R_A, R_B$
4	0,4	0,2	-	20	10	25	20	10	$R_A, R_B, R_C$
5	10	-	1	-	-	-	100	12	$P, R_A, R_B$
6	4	40	20	-	-	-	-	-	$S, R_A, R_B$
7	-	2	1	20	30	15	15	10	$R_A, R_B, P$
8	4	-	1	25	20	8	15	10	$R_A, R_B, P$
9	10	-	5	40	30	20	25	15	$R_A, R_B, P$
10	-	2	1	30	90	20	30	10	$R_A, R_B, P$





### 3.3. Odpowiedzi

#### Ad. 3.1. Redukcja przestrzennego dowolnego układu sił

- Ad 1) Skrętnik o osi przesuniętej  $W_g = 14,7$  [N],  $M_g = 643,7$  [Ncm]  
 Równanie osi centralnej:  $-x + y = 50$ ,  $y - 2,57 = 14,6$
- Ad 2) Wypadkowa leżąca na osi Oz.  $W_g = 6$  [N],  $M_g = 0$
- Ad 3) Para sił leżąca w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny Oxy.  
 $W_g = 0$ ,  $M_g = 20$  [Ncm]
- Ad 4) Wypadkowa leżąca w płaszczyźnie Oyz  $W_g = 25$  [N],  $M_g = 600$  [Ncm]. Równanie prostej działania wypadkowej:  $4y + 3z = 120$
- Ad 5) Wypadkowa leżąca w płaszczyźnie Oxy.  $W_g = 18,4$  [N],  $M_g = 0$   
 Równanie prostej działania wypadkowej:  $1,41y - 3,41x = 0$ ,
- Ad 6) Skrętnik o osi przesuniętej:  $W_g = 21,26$  [N],  $M_g = 751,53$  [Ncm]  
 Równanie osi centralnej:  $2,25x + y = 22,32$   $z - x = 0,23$
- Ad 7) Wypadkowa o osi przesuniętej:  $W_g = 11,56$  [N],  $M_g = 448,18$  [Ncm]  
 Równania prostej działania wypadkowej:  $x - 1,25z = -50$ ,  
 $z - 3,5y = 134$ ,  $4,5y - x = 106$
- Ad 8) Wypadkowa o osi przesuniętej:  $W_g = 17,32$  [N],  $M_g = 423$  [Ncm]  
 Równania prostej działania wypadkowej:  $x = y$ ,  $x - z = 30$ ,  
 $y - z = 30$
- Ad 9) Skrętnik o osi przesuniętej:  $W_g = 15,62$  [N],  $M_g = 646,22$  [Ncm]

Równania osi centralnej:  $4y - 3x = 190,8$   $6x + 4z = 275,4$   
 Ad 10) Para sił działająca w płaszczyźnie równoległej do osi Oz:  
 $W_g = 0$ ,  $M_g = 559,53$  [Ncm]

### Ad 3.2. Przestrzenny dowolny układ sił – równowaga

Ad 1)	$R_A = 4,31$ [kN]	$R_B = 3,09$ [kN]	$T = 1$ [kN]
Ad 2)	$R_A = 24,5$ [kN]	$R_B = 7,7$ [kN]	$P = 13$ [kN]
Ad 3)	$R_A = R_B = 15$ [kN]	$M = 385,6$ [Ncm]	
Ad 4)	$R_A = 6,02$ [kN]	$R_B = 10,2$ [kN]	$R_C = 0,5$ [kN]
Ad 5)	$R_A = 2,36$ [kN]	$R_B = 3,75$ [kN]	$P = 0,15$ [kN]
Ad 6)	$R_A = 70,75$ [kN]	$R_B = 34,58$ [kN]	$S = 2$ [kN]
Ad 7)	$R_A = 0,97$ [kN]	$R_B = 2,23$ [kN]	$P = 0,48$ [kN]
Ad 8)	$R_A = 2$ [kN]	$R_B = 5,34$ [kN]	$P = 2,51$ [kN]
Ad 9)	$R_A = 2,08$ [kN]	$R_B = 4,44$ [kN]	$P = 5,15$ [kN]
Ad 10)	$R_A = 6,59$ [kN]	$R_B = 5,07$ [kN]	$P = 6,93$ [kN]