

## 11. DYNAMIKA BRYŁY

a. Równania dynamiczne ruchu postępowego bryły mają postać

$$M\bar{a}_s = \bar{W}_g \quad (11.1)$$

lub

$$M\ddot{x}_s = W_{gx}, \quad M\ddot{y}_s = W_{gy}, \quad M\ddot{z}_s = W_{gz} \quad (11.2)$$

gdzie:  $M$  – masa bryły

$\bar{W}_g$  – suma geometryczna sił czynnych i reakcji

$\bar{a}_s$  – przyspieszenie środka masy lub dowolnego punktu bryły

b. Równanie dynamiczne ruchu obrotowego bryły ma postać

$$I_z \cdot \varepsilon = M_z \quad (11.3)$$

gdzie:  $I_z$  – moment bezwładności bryły względem osi obrotu

$\varepsilon$  – wartość przyspieszenia kątownego

$M_z$  – moment obrotowy tzn. algebraiczna suma momentów od sił czynnych i reakcji względem osi obrotu. ( Iloczyn  $I_z \cdot \varepsilon$  – przedstawia moment od sił bezwładności względem osi obrotu).

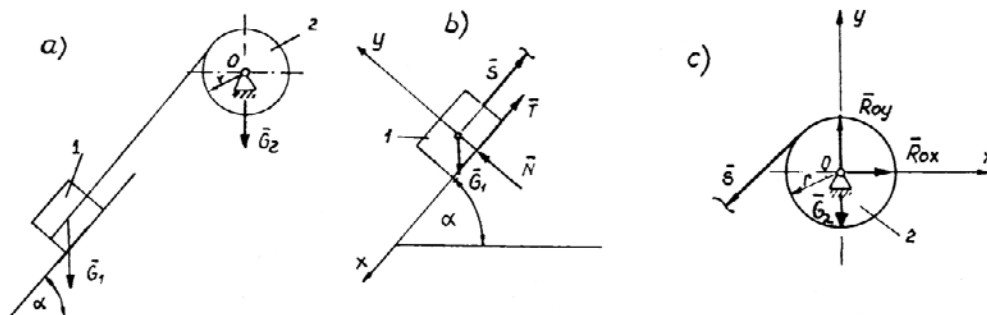
### Przykład

Ciało 1 zsuwa się po równi pochyłej, wprowadzając w ruch obrotowy bęben 2 (rys. 32a) za pomocą nawiniętej na niego linki. Mając dane: ciężar  $\bar{G}_1$  i  $\bar{G}_2$ , promień bębna  $r$ , współczynnik tarcia  $\mu$  między ciałem 1 a równią wyznaczyć siłę w linie, przyspieszenie  $x$  oraz równanie ruchu ciała 1, jeżeli w chwili  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ .

### Rozwiązanie

Rozważymy dwa układy po myślowym przecięciu linki. Układ 1 poruszający się ruchem postępowym prostoliniowym, na który działa

siłą  $\bar{G}_1$  i reakcji więzów:  $\bar{S}$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{N}$  (rys. 32b) i układ 2 poruszający się ruchem obrotowym wokół osi przechodzącej przez punkt 0, na który działają siłą ciężkości  $\bar{G}_2$  i siły reakcji więzów  $\bar{S}$ ,  $\bar{R}_{ox}$  i  $\bar{R}_{oy}$  (rys. 32 c). Rzutując wszystkie siły na przyjęty układ osi 0xy otrzymamy równanie dynamiczne dla ruchu postępowego



Rys. 32

$$\begin{aligned} \frac{G_1}{g} \ddot{x} &= G \sin \alpha - S - T \\ 0 &= N - G \cos \alpha \end{aligned} \quad (a)$$

skąd:  $N = G \cos \alpha$ , czyli  $T = \mu N = G_1 \cos \alpha$

A zatem dynamiczne równanie ruchu przyjmie postać

$$\frac{G_1}{g} \ddot{x} = G_1 \sin \alpha - S - \mu G_1 \cos \alpha \quad (b)$$

Korzystając z równania (11.3) napiszemy równanie dynamiczne ruchu obrotowego w postaci

$$I_z \cdot \ddot{\varphi} = S \cdot r \quad (c)$$

Ponieważ

$$I_z = \frac{1}{2} \frac{G_2}{g} r^2, \quad \text{zaś} \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r} \quad \text{więc}$$

$$\frac{1}{2} \frac{G_2}{g} r^2 \cdot \frac{\ddot{x}}{r} = S r$$

skąd

$$S = \frac{1}{2} \frac{G_2}{g} \ddot{x} \quad (d)$$

Korzystając z równania (b) i (d) wyznaczymy  $S$  i  $\ddot{x}$  w postaci

$$\ddot{x} = \frac{G_1}{2 G_1 + G_2} \cdot 2 g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (e)$$

$$S = \frac{G_1 G_2}{2 G_1 + G_2} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (f)$$

Całkując równanie (e) mamy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{G_1}{2 G_1 + G_2} \cdot 2 g t (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + C_1 \\ x &= \frac{G_1}{2 G_1 + G_2} \cdot g t^2 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

przy  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$  więc:  $C_1 = C_2 = 0$

A zatem równanie ruchu ciała 1 ma postać

$$x = \frac{G_1}{2 G_1 + G_2} \cdot g t^2 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

c. Równania dynamiczne ruchu płaskiego bryły mają postać

$$\begin{aligned} M \ddot{x}_s &= W_{gx} \\ M \ddot{y}_s &= W_{gy} \\ I_s \cdot \varepsilon_s &= M_s \end{aligned} \quad (11.4)$$

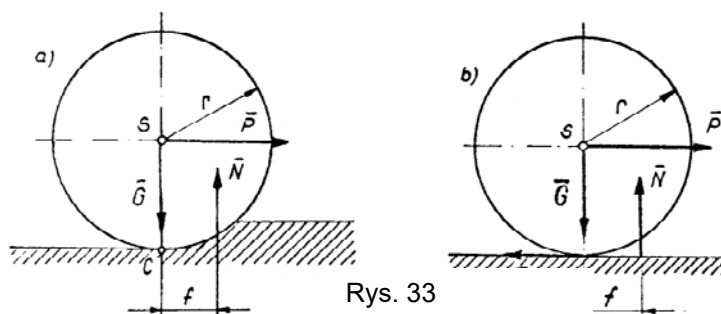
gdzie:  $I_s$  – moment bezwładności bryły względem prostej przechodzącej przez środek masy i prostopadłej do płaszczyzny kierowniczej

$\varepsilon_s$  – wartość prędkości kątowej względem ww. prostej

$M_s$  – algebraiczna suma momentów sił czynnych i reakcji względem tej prostej

Przykład

Walec o ciężarze  $\bar{G}$  i promieniu  $r$  toczy się bez poślizgu po poziomej płaszczyźnie pod działaniem poziomej siły  $\bar{P}$  przyłożonej do walca w środku jego masy  $S$  (rys. 33 a). Wyznaczyć wartość siły tarcia  $\bar{T}$  i przyspieszenie środka masy, jeżeli ramie oporu toczenia wynosi  $f$ .



Rys. 33

Rozwiązanie

Walec porusza się ruchem płaskim. Równanie dynamiczne ruchu tego walca po przyjęciu osi współrzędnych otrzymamy korzystając z (11.4) z postaci

$$\frac{G}{g} \ddot{x}_s = P - T, \quad 0 = G - R, \quad I_s \cdot \varepsilon_s = T \cdot r - G \cdot f$$

Ponieważ

$$I_s = \frac{1}{2} \frac{G}{g} r^2, \quad \varepsilon_s = \frac{\ddot{x}_s}{r}, \quad R = G \quad \text{więc}$$

$$\frac{G}{g} \ddot{x}_s = P - T, \quad \frac{1}{2} \frac{G}{g} r^2 \frac{\ddot{x}_s}{r} = T \cdot r - G \cdot f$$

skąd

$$T = \frac{1}{3} \left( P + 2 G \frac{f}{r} \right), \quad \ddot{x}_s = \frac{2}{3} g \left( \frac{P}{G} - \frac{f}{r} \right)$$

W przypadku gdy uważamy ciała za doskonale sztywne:  $f = 0$  i wówczas:

$$T = \frac{1}{3} P, \quad \ddot{x}_s = \frac{2}{3} g \frac{P}{G}$$

d. Zasada d'Alemberta. Reakcje dynamiczne. Dla układu punktów materialnych zasadę d'Alemberta można zapisać w postaci

$$\sum_{i=1}^n (\bar{P}_i + \bar{B}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (11.5)$$

gdzie:  $\bar{P}_i$  – suma geometryczna sił czynnych i reakcji działających na  
i – ty punkt układu

$\bar{B}_i$  – siła bezwładności i – tego punktu

„W czasie ruchu w dowolnej chwili suma geometryczna sił czynnych i reakcji działających na punkt materialny pozostaje w równowadze z pomyślaną siłą bezwładności tego punktu”

Jeżeli bryła znajduje się w ruchu obrotowym, to zasadę d'Alemberta można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\bar{P}_i + \bar{B}_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n [\bar{M}_{io}(\bar{P}_i) + \bar{M}_{oi}(\bar{B}_i)] &= 0 \end{aligned} \quad (11.6)$$

Po zrutowaniu tych równań na osie układu współrzędnych otrzymano równania, z których można wyznaczyć reakcje dynamiczne

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (P_{ix} + B_{ix}) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n (P_{iy} + B_{iy}) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{iz} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{ix}(\bar{P}_i) + M_{ix}(\bar{B}_i) &= 0 \end{aligned} \quad (11.7)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iy} (\bar{P}_i) + M_{iy} (\bar{B}_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iz} (\bar{P}_i) + M_{iz} (\bar{B}_i) = 0$$

Po odpowiednich przekształceniach równania te można zapisać w prostszej postaci

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ix} + m x_s \omega^2 + m y_s \varepsilon &= 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{iy} + m y_s \omega^2 + m x_s \varepsilon &= 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{iz} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{ix} - D_{yz} \omega^2 + D_{zx} \varepsilon &= 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{iy} + D_{zx} \omega^2 + D_{yz} \varepsilon &= 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{iz} - I_z \cdot \varepsilon &= 0 \end{aligned} \quad (11.8)$$

gdzie:  $x_s, y_s$  – współrzędne środka masy

$D_{zx}, D_{yz}$  – moment dewiacji

### Przykład

Dla układu pokazanego na rys. 34a wyznaczyć reakcje w łożyskach A i B oraz siłę w sprężynie, jeżeli:  $m_1 = 3$  [kg],  $m_2 = 2$  [kg],  $m_3 = 5$  [kg],  $l_1 = 30$  [cm],  $l_2 = 20$  [cm],  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\omega = 120$  [s<sup>-1</sup>] = const. Pozostałe wymiary podano na rysunku.

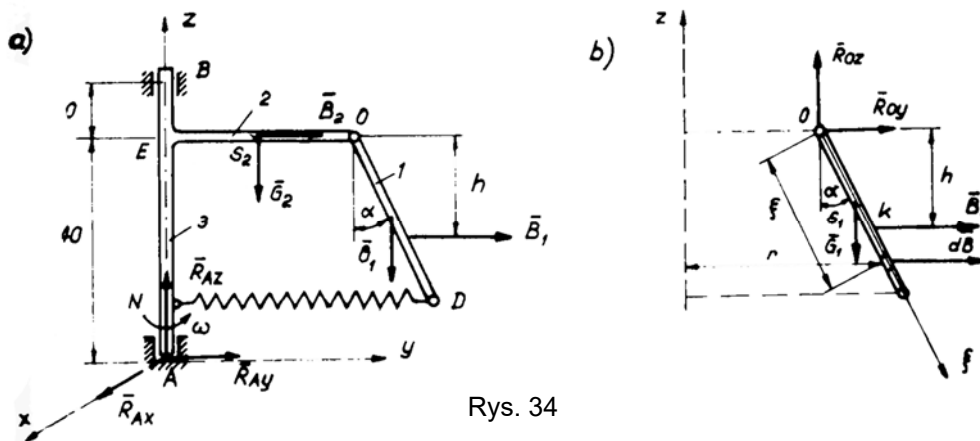
Rozwiązanie

$$\bar{B} = -m \bar{a}_s$$

gdzie:  $m$  – masa ciała,  $\bar{a}_s$  – przyspieszenie środka masy. W naszym przypadku

$$B_1 = m_1 a_{s1}^n = m_1 \omega^2 (0,5 l_1 \sin \alpha + l_2)$$

$$B_2 = m_2 a_{s2}^n = m_2 \omega^2 \cdot 0,5 l_2$$



Rys. 34

Aby wyznaczyć reakcje łożysk, należy znać punkt przyłożenia siły  $\bar{B}_1$  (wektor siły  $\bar{B}_2$  pokrywa się z osią pręta 2, dlatego punkt przyłożenia jest znany). Ponieważ suma algebraiczna momentów równoległych sił bezwładności punktów pręta względem punktu 0, jest równa momentowi wypadkowej tych sił, więc

$$B_1 \cdot h = \int_0^{l_1} \xi \cos \alpha \cdot d\bar{B}$$

gdzie:  $h$  – ramię siły  $\bar{B}_1$  względem punktu 0

$d\bar{B}$  – siła bezwładności elementu pręta o długości  $d\xi$

$\xi$  – współrzędna elementu pręta (rys. 34b)

Wykorzystując wartość siły  $\bar{B}_1$  i biorąc pod uwagę, że

$$d\bar{B} = (l_2 + \xi \sin \alpha) \omega^2 \cdot \gamma \cdot d\xi$$

gdzie:  $\gamma$  – masa odcinka pręta o długości jednostkowej, otrzymamy

$$m_1 \omega^2 (0,5 l_1 \sin \alpha + l_2) h = \int_0^{l_1} (l_2 + \xi \cdot \sin \alpha) \omega^2 \cdot \gamma \cdot \xi \cdot \cos \alpha \cdot d\xi$$

skąd

$$h = \frac{l_1 (l_2 + \frac{2}{3} l_1 \sin \alpha) \cos \alpha}{l_1 \sin \alpha + 2 l_2} = 16,4 \cos \alpha$$

Ponieważ rozpatrywany układ sił leży w płaszczyźnie Axz, więc

$$R_{Ax} = R_{Bx} = 0$$

$$-R_{By} \cdot 50 - B_2 \cdot 40 - G_2 \cdot 10 - G_1 \cdot 27,5 - B_1(40 - 16,4 \cos \alpha) = 0$$

skąd

$$R_{By} = -8,47 \text{ [kN]}$$

$$R_{Ay} + R_{By} + B_1 + B_2 = 0 \quad \text{skąd} \quad R_{By} = -6,28 \text{ [kN]}$$

$$R_{Az} - G_1 - G_2 - G_3 = 0 \quad \text{skąd} \quad R_{Az} = 0,098 \text{ [kN]}$$

Aby wyznaczyć siłę reakcji w sprężynie DN, obliczamy  $\sum M_{i0} = 0$  sił przyłożonych do pręta 1 (rys.34a)

$$-G_1 \frac{l_1}{2} \sin \alpha + B_1 h - S l_1 \cos \alpha = 0$$

skąd  $S = 6,47 \text{ [kN]}$

e. Przybliżona teoria żyroskopów. Wektor krętu  $\bar{K}_0$  względem nieruchomego bieguna 0 przyjmuje się za skierowany wzdłuż osi żyroskopu [6]. Wynosi on

$$\bar{K}_0 = I_z \cdot \bar{\omega} \quad (11.9)$$

gdzie:  $I_z$  – moment bezwładności względem osi własnej żyroskopu

$\bar{\omega}$  – prędkość kątowa własna żyroskopu. Ruch osi żyroskopu wyznacza się za pomocą ruchu końca wektora  $\bar{K}_0$ . Zgodnie z twierdzeniem Resala mamy

$$\bar{v}_A = \bar{\omega}_1 \times \bar{K}_0 = \frac{d \bar{K}_0}{dt} = \bar{M}_0 \quad (11.10)$$



gdzie:  $\bar{v}_A$  – prędkość końca A wektora  $K_0$

$\bar{\omega}_1$  – prędkość kątowa obrotu wektora  $K_0$  (prędkość precesji)

$\bar{M}_0$  – moment główny od sił zewnętrznych względem nieruchomego bieguna

Moment żyroskopowy wyznacza się ze wzoru

$$\bar{M}_G = -\bar{M}_0 = I_z \cdot (\bar{\omega} \times \bar{\omega}_1) \quad (11.11)$$

f. Równania dynamiczne ruchu kulistego mają postać

$$\begin{aligned} I_\xi \cdot \dot{\omega}_\xi + \omega_\eta \cdot \omega_\zeta (I_\zeta - I_\eta) &= M_\xi \\ I_\eta \cdot \dot{\omega}_\eta + \omega_\zeta \cdot \omega_\xi (I_\xi - I_\zeta) &= M_\eta \\ I_\zeta \cdot \dot{\omega}_\zeta + \omega_\xi \cdot \omega_\eta (I_\eta - I_\xi) &= M_\zeta \end{aligned} \quad (11.12)$$

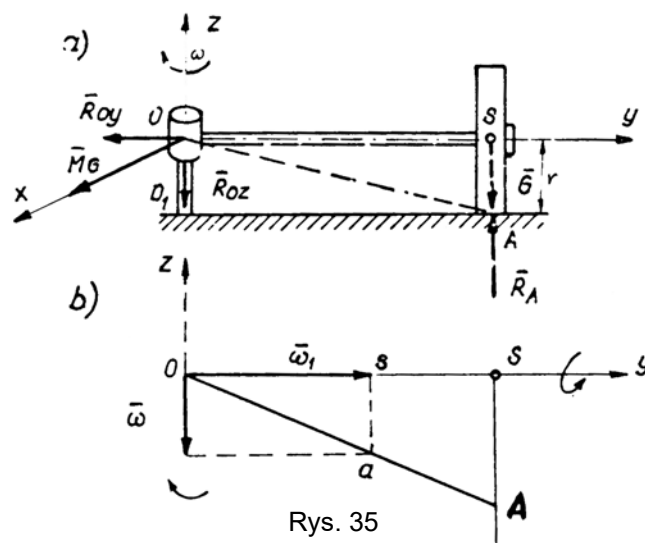
gdzie:  $I_\xi, I_\eta, I_\zeta$  – momenty bezwładności bryły względem głównych osi bezwładności w nieruchomym punkcie,

$M_\xi, M_\eta, M_\zeta$  – rzuty momentu głównego od sił czynnych i reakcji na te osie,

$\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$  – rzuty chwilowej prędkości kątowej na te osie.

### Przykład

Do wału  $00_1$  przymocowany jest przegubowo poziomy pręt  $0S$ , na którym jest swobodnie osadzony krążek. Przy obrocie wału  $00_1$  wokół pionowej osi  $0_2$  krążek toczy się bez poślizgu po poziomej płaszczyźnie (rys. 35a). Wyznaczyć reakcje żyroskopowe w punktach  $O$  i  $A$  oraz siłę w pręcie  $0S$ , jeżeli ciężar krążka wynosi  $\bar{G}$ , długość  $OS = l$ , promień koła  $r$ , a wartość prędkości kątowej wału  $\omega = \text{const}$ .



Rys. 35

Rozwiązanie

Oznaczmy prędkość kątową krążka wokół osi OS przez  $\omega_1$ . Prędkość punktu A jest równa zero, dlatego chwilowa oś obrotu krążka przechodzi przez punkty 0 i A, a jego prędkość kątowa bezwzględna skierowana jest wzdłuż osi OA

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}$$

Budując równoległobok z prędkości kątowych z podobieństwa trójkątów OAS i Oas (rys.35b) otrzymamy

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{AS}{OS} = \frac{r}{l} \quad \text{skąd} \quad \omega_1 = \omega \frac{l}{r}$$

Korzystając z (11.7) znajdziemy moment żyroskopowy

$$M_G = I_y \omega_1 \cdot \omega$$

Ponieważ

$$I_y = \frac{1}{2} \frac{G}{g} r^2$$

więc

$$M_g = \frac{1}{2} \frac{G}{g} r^2 \cdot \omega \frac{l}{r} \omega = \frac{Gr\omega^2 l}{2g}$$

Reakcje żyroskopowe  $\bar{R}_{OZ}$  i  $\bar{R}_A$  w punktach 0 i A tworzą parę sił o momencie  $\bar{M}_G$ , którego kierunek zgodnie z (11.6) skierowany jest wzdłuż osi Ox (rys. 35a), a więc

$$R_A = R_{0z} = \frac{M_G}{I} = \frac{G r}{2 g} \cdot \omega^2$$

Całkowity nacisk krążka na płaszczyznę w punkcie A jest równy sumie dwóch sił:  $\bar{G}$  i  $\bar{R}_A$

$$N = G + R_A = G \left(1 + \frac{r \omega^2}{2 g}\right)$$

Dośrodkowe przyspieszenie środka masy S krążka skierowane jest od punktu S do O, a jego wartość

$$a_s^n = l \omega^2$$

Korzystając z zasady ruchu środka masy otrzymamy

$$R_{0y} = \frac{G}{g} a_s^n = \frac{G}{g} l \omega^2$$

Siłą w pręcie jest równa sile  $\bar{R}_{0y}$ .

Całkowita wartość reakcji w punkcie O wynosi

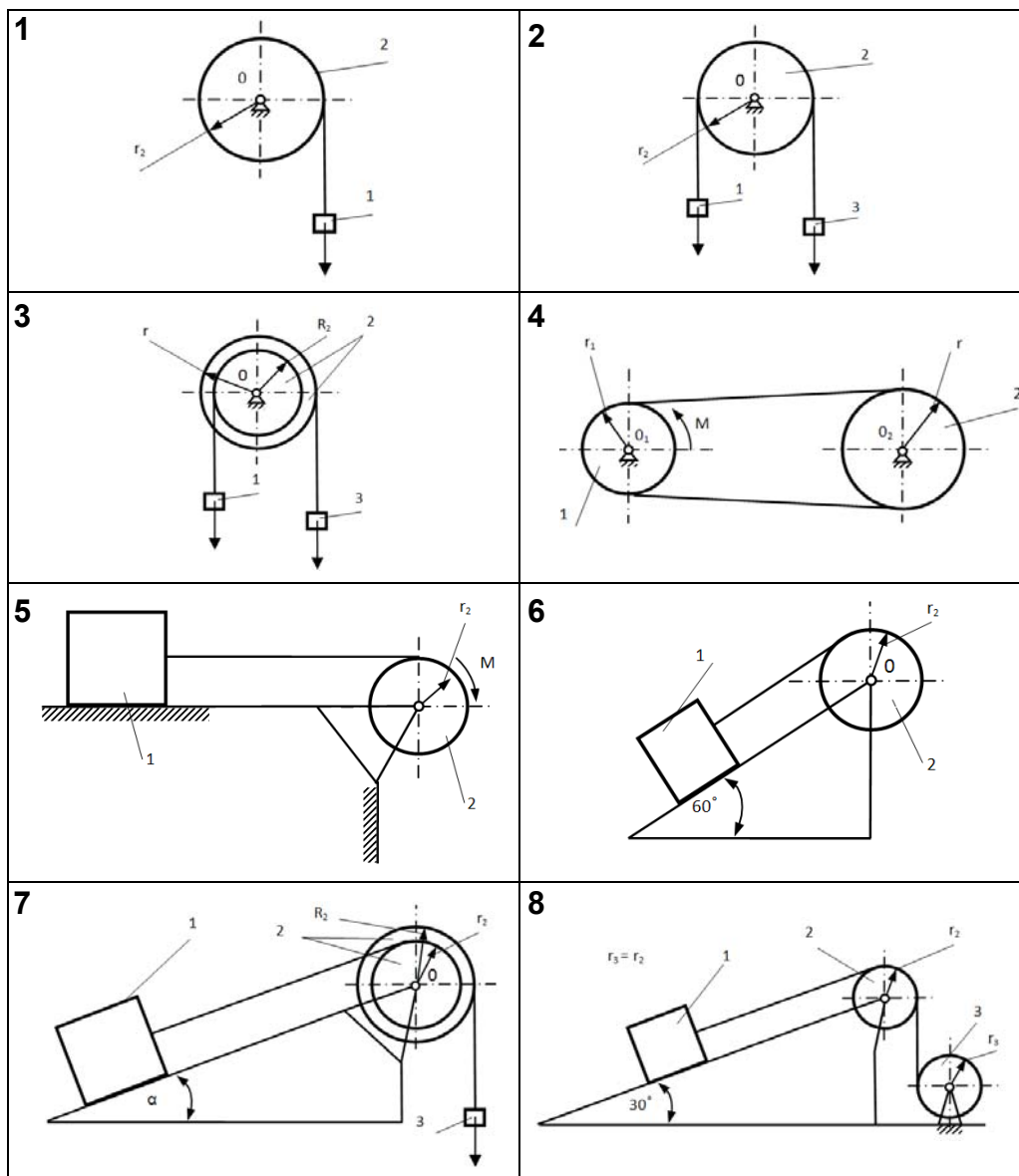
$$R_0 = \sqrt{R_{0y}^2 + R_{0z}^2} = \frac{G}{2 g} \sqrt{r^2 + 4 l^2}$$

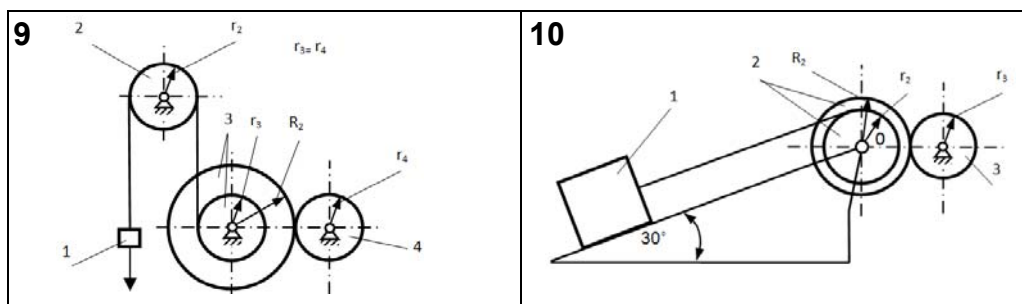
### 11.1. Równania dynamiczne ruchu postępowego i obrotowego bryły

W układach mechanicznych przedstawionych na rys. 1 – 6, str. 151 wyznaczyć siły w linkach (bezmasowych) oraz przyspieszenie liniowe ciał będących w ruchu postępowym. W układach 7 – 10 mając dany czas rozruchu  $t_r = 2$  [s] oraz prędkość na końcu okresu rozruchu  $v = 8$  [m/s] (przyjąć ruch jednostajnie przyspieszony) wyznaczyć moc na końcu okresu rozruchu, jeżeli sprawność silnika  $\eta_s = 0,98$ , a sprawność przekładni zębatej, wariant 9 – 10 wynosi  $\eta_p = 0,96$ . Dane do obliczeń zestawiono w tabeli. Przez  $i_{1x}$  oraz  $i_{2x}$  oznaczono promień bezwładności kół 1 i 2.

Nr rys	Masa [kg]			Wymiar [cm]		Wymiar [cm]		Moment [Nm]		Wsp. tarcia $\mu$
	$m_1$	$m_2$	$m_3, m_4$	$R_1 = 2r_1$	$R_2 = 2r_2$	$i_{1x}$	$i_{2x}$	M	$M_0$	
1	100	10	-	-	20	-	-	-	-	-
2	100	60	40	-	40	-	-	-	-	-
3	100	80	60	-	30	-	25	-	-	-
4	40	100	-	30	45	-	-	2000	-	-

5	100	40	-	-	20	-	-	400	-	0,2
6	100	50	-	-	20	-	-	-	-	0,2
7	40	60	20	-	-	-	30	-	-	-
8	100	40	80	-	20	-	-	-	-	-
9	100	10	60	20	40	-	-	-	-	-
10	100	50	40	-	30	-	-	-	-	-



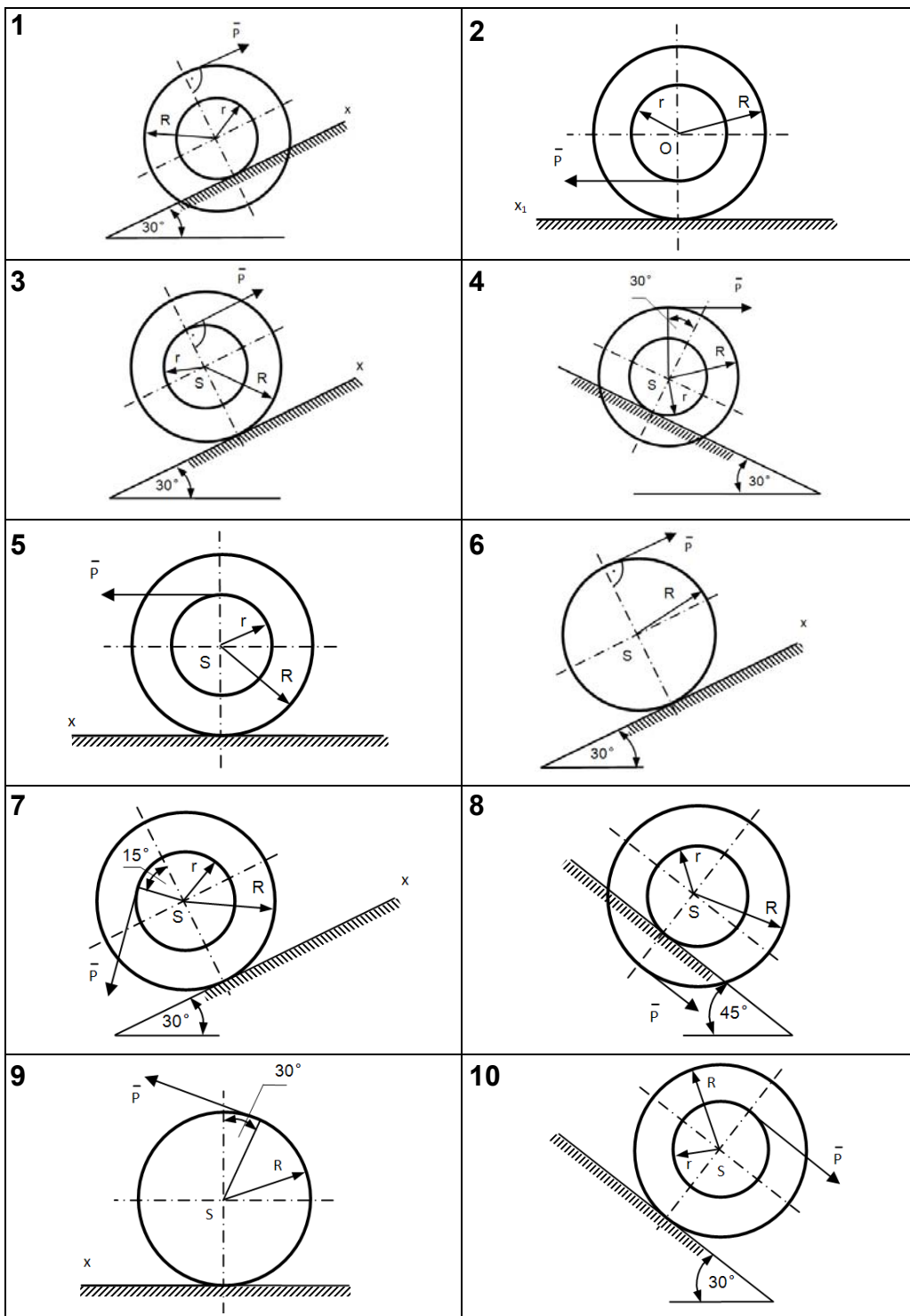


### 11.2. Równanie dynamiczne ruchu płaskiego bryły

Wyznaczyć maksymalną wartość siły  $\bar{P}$ , przyłożonej do koła o masie  $m$  (rys. 1 ÷ 10, str. 153), pod działaniem której toczy się ono bez poślizgu. Znaleźć także dla tego przypadku równanie ruchu środka masy koła  $S$ , jeżeli dla  $t = 0$ ,  $x_s = 0$ ,  $\dot{x}_s = 0$ .

Uwaga: wprowadzono następujące oznaczenia:  $\mu$  – współczynnik tarcia ślizgowego,  $f$  – ramię oporu toczenia.

Nr rys.	Masy [kg]				$R=2r$ [cm]	Prom. bezw. [cm]			$P$ [N]	$\mu$	$f$ [cm]
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$		$i_{1x}$	$i_{2x}$	$i_{3x}$			
1	300	-	-	-	80	50	-	-	-	0,35	1,0
2	200	-	-	-	60	40	-	-	-	0,20	0,8
3	180	-	-	-	60	50	-	-	-	0,10	-
4	220	-	-	-	70	30	-	-	-	0,20	-
5	240	-	-	-	60	40	-	-	-	0,10	1,0
6	200	-	-	-	50	-	-	-	-	0,20	0,5
7	200	-	-	-	60	40	-	-	-	0,10	-
8	150	-	-	-	70	40	-	-	-	0,40	-
9	250	-	-	-	-	-	-	-	-	0,15	-
10	150	-	-	-	50	40	-	-	-	0,30	0,7

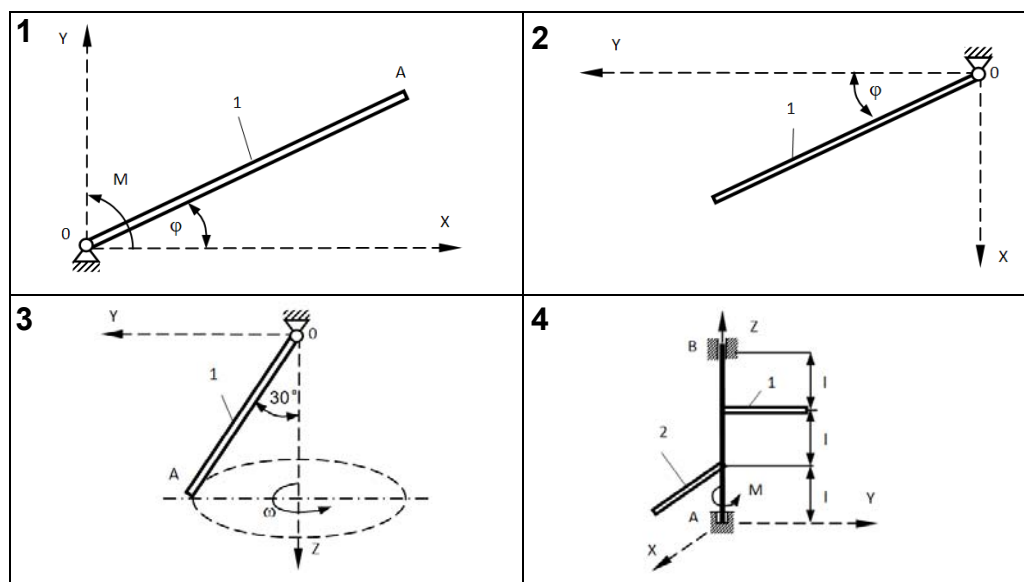


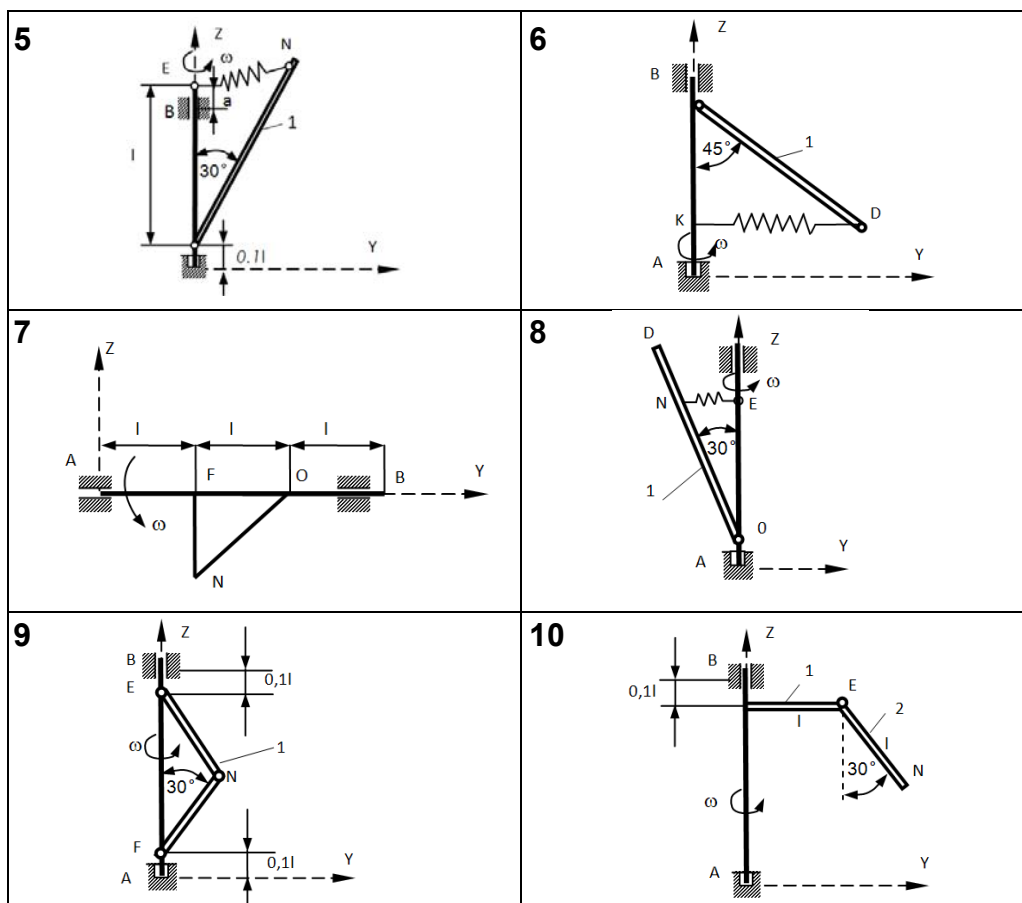
### 11.3. Zasada d'Alemberta. Reakcje dynamiczne

Dla układów mechanicznych pokazanych na rys. 1 ÷ 10 wyznaczyć siły reakcji więzów dla dowolnej chwili  $t$  oraz  $t_1 = 10$  [s], - dla wariantu 2 dla  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Uwaga: płaszczyzna  $Oxy$  ( $Axy$ ) jest pozioma, zaś płaszczyzna  $Oyz$  ( $Ayz$ ) pionowa. Dla  $t = 0$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\dot{\varphi}_0 = 0$  (warianty 1 ÷ 10).

Nr rys	Masa [kg]			Wymiar [cm]		M [Nm]	$\omega$ [s <sup>-1</sup> ]	$\mu$	Dodatkowe dane
	m1	m2	m3	r	l				
1	20	-	-	-	60	1,0	-	-	$OA = l$
2	25	-	-	-	50	-	-	-	$OA = l$
3	40	-	-	-	80	-	-	-	$OA = l$
4	25	40	-	-	30	5-0,1 t	-	-	-
5	30	-	-	-	40	-	10	-	$OE = EN$
6	30	-	-	-	40	-	12	-	$OD = AD = l$ ; $OB = \frac{2}{10} l$
7	40	-	-	-	60	-	9	-	$ON = 2 l$
8	30	-	-	-	60	-	9	-	$OB = OD = l$ ; $OA = \frac{2}{10} l$
9	25	25	-	-	40	-	15	-	-
10	20	20	-	-	40	-	-	-	$AB = 2 l$



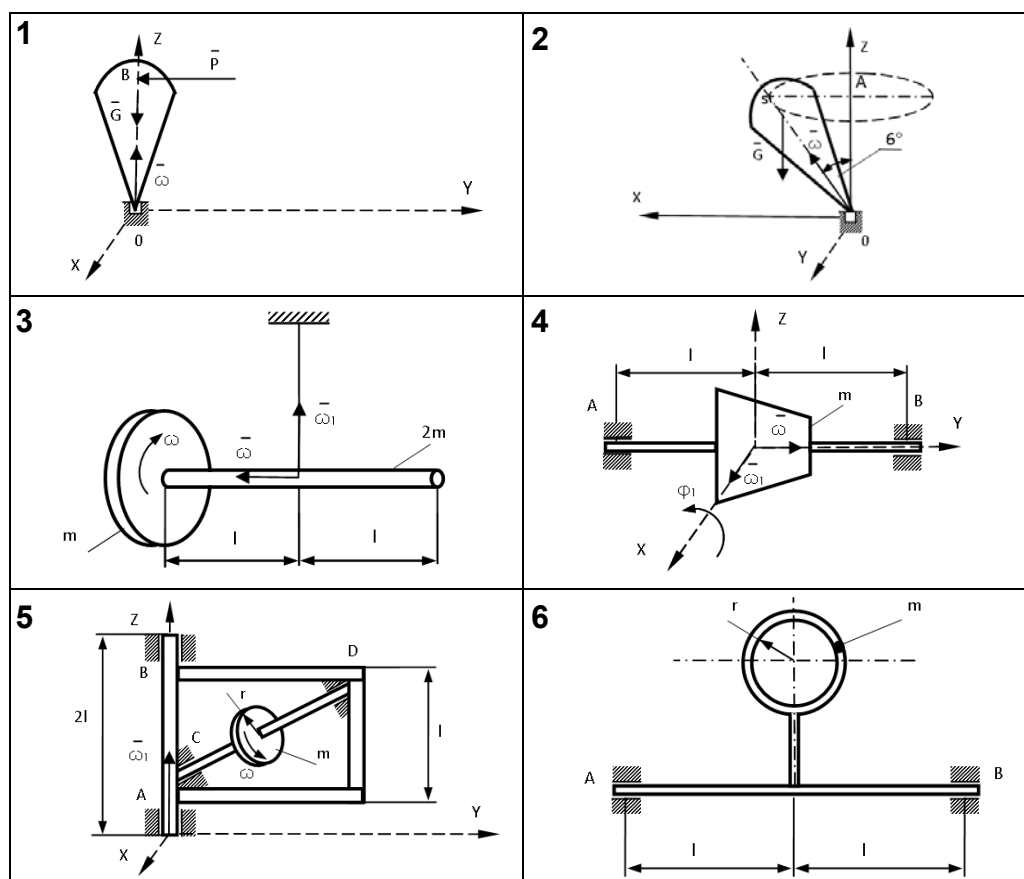


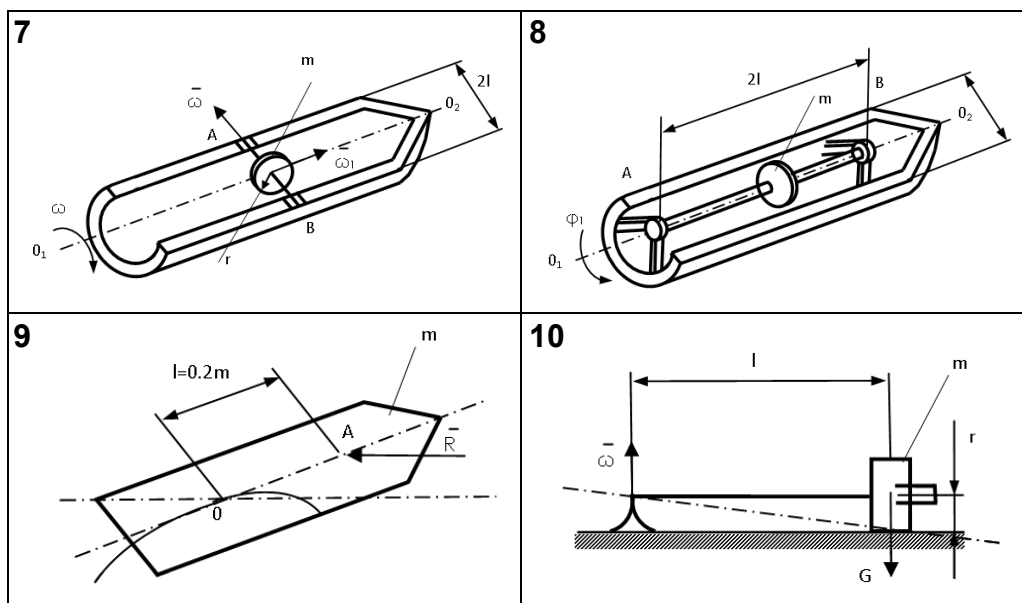
#### 11.4. Przybliżona teoria żyroskopów. Równania dynamiczne ruchu kulistego

Korzystając z teorii żyroskopu w układach mechanicznych pokazanych na rys. 1 ÷ 10, str. 156 wyznaczyć: kierunek ruchu osi żyroskopu, jeżeli przyłożono do niego siłę  $\bar{P}$  (wariant 1), prędkość kątową  $\bar{\omega}_1$  po wychyleniu osi wskutek działania siły  $\bar{P}$  (wariant 2), prędkość kątową  $\bar{\omega}_1$  (wariant 3), naciski na łożyska A i B (wariant 4 – 8, 9, 10). W wariantcie 9 wyznaczyć czas pełnego obrotu osi symetrii lecącego pocisku wokół stycznej do toru środka masy. Dane do obliczeń zestawiono w tabeli.



Nr rys	Masa [kg] m	Prom. bezw. i [cm]	Promień [m] r	Prędkość kątowna [s <sup>-1</sup> ]		Długość [m] l	Dodatkowe dane
				$\omega$	$\omega_1$		
1	m	i	-	$\omega$	-	$OS = l$	P
2	m	i	-	$\omega$	-	$OS = l$	$I = mi^2$ , wzgl. OS
3	m	-	r	$\omega$	-	l	-
4	4 m	i	-	$\omega$	-	l	$\varphi_1 = \varphi_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$
5	m	-	r	$\omega$	$\omega_1$	l	-
6	m	-	r	$\omega$	$\omega_1$	l	-
7	m	-	r	$\omega$	-	l	$\varphi_1 = \varphi_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$
8	m	-	r	$\omega$	-	l	$\varphi_1 = \varphi_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$
9	m	-	-	-	-	l	$P = 2 \cdot 10^4$ N, $K_x = 590$ Nms
10	m	-	r	$\omega$	-	l	-





### 11.5. Odpowiedzi

#### Ad. 11.1) Równania dynamiczne ruchu postępowego i obrotowego bryły

- Ad 1)  $S_1 = 33 \text{ [N]}$ ,  $a_1 = 6,6 \text{ [m/s}^2\text{]}$   
 Ad 2)  $S_1 = 667 \text{ [N]}$ ,  $a_1 = a_2 = 3,33 \text{ [m/s}^2\text{]}$ ,  $S_2 = 533,2 \text{ [N]}$   
 Ad 3)  $S_1 = 1058 \text{ N}$ ,  $a_3 = 2a_1 = 1,16 \text{ [m/s}^2\text{]}$ ,  $S_2 = 530,4 \text{ [N]}$   
 Ad 4)  $\varepsilon_1 = \frac{M \cdot g}{(P_1 + P_2)r_1^2}$   
 Ad 5)  $S_1 = 3366 \text{ [N]}$ ,  $a_1 = 31,6 \text{ [m/s}^2\text{]}$   
 Ad 6)  $S_1 = 152 \text{ [N]}$ ,  $a_1 = 6,08 \text{ [m/s}^2\text{]}$   
 Ad 7)  $S_1 = 244,4 \text{ [N]}$ ,  $a_2 = 2a_1 = 2,22 \text{ [m/s}^2\text{]}$ ,  $S_2 = 155,6 \text{ [N]}$   
 Ad 8)  $N_3 = 9306 \text{ [W]}$   
 Ad 9)  $N_3 = 23686,5 \text{ [W]}$   
 Ad 10)  $N_3 = 15802 \text{ [W]}$

#### Ad. 11.2. Równania dynamiczne ruchu płaskiego bryły

- Ad 1)  $P = 113,5 \text{ [N]}$ ,  $x_s = -0,86 \text{ t}^2$   
 Ad 2)  $P = 569 \text{ [N]}$ ,  $x_s = 0,165 \text{ t}^2$

Ad 3)	$P = 1854 \text{ [N]},$	$x_s = 3,1 \text{ t}^2$
Ad 4)	$P = 946 \text{ [N]},$	$x_s = 5,3 \text{ t}^2$
Ad 5)	$P = 6960 \text{ [N]},$	$x_s = 15 \text{ t}^2$
Ad 6)	$P = 2074 \text{ [N]},$	$x_s = 3,55 \text{ t}^2$
Ad 7)	$P = 1900 \text{ [N]},$	$x_s = 48 \text{ t}^2$
Ad 8)	$P = 1410 \text{ [N]},$	$x_s = 6,8 \text{ t}^2$
Ad 9)	$P = 825 \text{ [N]},$	$x_s = 2,05 \text{ t}^2$
Ad 10)	$P = 985,5 \text{ [N]},$	$x_s = 4,55 \text{ t}^2$

### Ad. 11.3 Zasada d'Alamberta. Reakcje dynamiczne

$$\text{Ad 1)} \quad R_0 = \frac{M \cdot m \cdot l}{2 \cdot l_0} \sqrt{1 + \left(\frac{M}{l_0}\right)^2 t^4}$$

$$\begin{aligned} \text{Ad 2)} \quad R_0 &= m \sqrt{0,25 l^2 \cos^2 \varphi (\dot{\varphi}^2 + 1,5 \frac{g}{l} \sin \varphi)^2 +} \\ &+ \sqrt{[g + 0,5 l (\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + 1,5 \frac{g}{l} \cos^2 \varphi)]^2}, \\ R_0 \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) &= 3,25 \text{ mg} \end{aligned}$$

$$\text{Ad 3)} \quad R_0 = m g \sqrt{1 + \frac{9}{16} \text{tg}^2 \alpha}$$

$$\text{Ad 4)} \quad R_A = \sqrt{\frac{1}{36} l \left( \begin{aligned} &2 \ddot{\varphi} m_2 l - \dot{\varphi}^2 m_1 l + m_1 g)^2 + \\ &\ddot{\varphi} m_1 l + 2 \dot{\varphi}^2 m_2 l - m_2 g)^2 \end{aligned} \right) + (m_1 + m_2)^2 g^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Ad 5)} \quad R_A &= -\frac{1}{2} m_1 \sin 60^\circ \left[ g + \frac{4}{3} \omega^2 l \cos^2 30^\circ \right], \\ R_B &= m_1 \sqrt{g^2 + 0,25 \sin^2 60^\circ [g + \omega^2 l \left( \frac{4}{3} \cos^2 30^\circ - 1 \right)]^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ad 6)} \quad R_A &= m_1 \sqrt{g^2 + \sin^2 45^\circ \left[ \frac{1}{6} \frac{4 \cdot l \cos 45^\circ + 3 g}{2 \cos 45^\circ - 0,2} - \omega^2 \frac{l}{2} \right]^2}, \\ R_B &= -\frac{m_1 \sin 45^\circ \left[ \frac{2}{3} l \omega^2 \cos 45^\circ + \frac{1}{2} g \right]}{2 \cos 45^\circ - 0,2} \end{aligned}$$

$$\text{Ad 7)} \quad R_A = 0,46 \text{ [kN]}, \quad R_B = 0,36 \text{ [kN]}$$

$$\text{Ad 8)} \quad R_A = m_1 \sqrt{0,25 l^2 \sin^2 \alpha [\omega^2 (0,9 - \frac{2}{3} \cos \alpha) - g]^2 + g^2}$$

$$\text{Ad 9) } R_A = \sqrt{\left[ \frac{2g}{0,2+2\cos\alpha} + \frac{2}{3}\omega^2 l \right]^2 m_1^2 \sin^2\alpha + g^2 (m_1 + m_2)^2},$$

$$R_B = \left( \frac{2g}{0,2+2\cos\alpha} + \omega^2 \frac{l}{2} \right) m_1 \sin\alpha$$

Ad 10)

$$R_A = \sqrt{\frac{1}{4} \left\{ \frac{-g \sin\alpha}{\cos\alpha(0,5 + \frac{1}{3}\sin\alpha)} [m_2 (0,25 \cos\alpha + \frac{1}{6}\sin\alpha \cos\alpha + 0,025 \sin\alpha + 0,05) + 0,025 m_1] \right.}$$

$$\left. + g [0,5 m_1 + m_2 (1 + 0,5 \sin\alpha)] \right\}^2 + (m_1 + m_2)^2 g^2}$$

$$R_B = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{g \sin\alpha}{\cos\alpha + \frac{1}{3}\sin 2\alpha} [0,95 m_1 + m_2 (1,9 + 0,55 \sin\alpha - \right.$$

$$\left. - 0,5 \cos\alpha + -\frac{1}{6}\sin 2\alpha] + g [0,5 m_1 + m_2 (1 + 0,5 \sin\alpha)] \right\}$$