

### III. DYNAMIKA

#### 9. ODWROTNE I PROSTE ZADANIE DYNAMIKI PUNKTU

- a. Do odwrotnego zadania dynamiki odnoszą się zadania, w których znając masę punktu materialnego i jego równania ruchu należy wyznaczyć wartość i kierunek wypadkowej sił działających na punkt materialny. Rozwiązanie tego zagadnienia sprowadza się do wyznaczenia przyspieszenia poprzez różniczkowanie względem czasu, równań ruchu punktu. Jeżeli ruch punktu jest opisany wektorem promieniem wodzącym  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  to  $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ . Wówczas wg. drugiego prawa Newtona jest:

$$\vec{W} = m \vec{a} = m \ddot{\vec{r}} \quad (9.1)$$

Jeżeli ruch punktu opisany jest równaniami skończonymi ruchu:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , to rzuty wypadkowej  $\vec{W}$  wszystkich sił działających na punkt, jej wartość i kierunek wyznaczamy ze wzorów

$$\left. \begin{aligned} W_x &= m \ddot{x}, \quad W_y = m \ddot{y}, \quad W_z = m \ddot{z}, \quad W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} \\ \cos(\vec{W}, \vec{i}) &= \frac{W_x}{W}, \quad \cos(\vec{W}, \vec{j}) = \frac{W_y}{W}, \quad \cos(\vec{W}, \vec{k}) = \frac{W_z}{W} \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Jeżeli ruch punktu opisano sposobem naturalnym, to najpierw wyznacza się  $v = \frac{ds}{dt}$ , a następnie rzuty siły  $\vec{W}$  na osie trójkątnego Freneta i w końcu wartość i kierunek wypadkowej:

$$\left. \begin{aligned} W_\tau &= m a_\tau = m \frac{dv}{dt}, \quad W_n = m a_n = m \frac{v^2}{\rho}, \quad W_b = 0 \\ W &= \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}, \quad \cos(\vec{W}, \vec{\tau}) = \frac{W_\tau}{W}, \quad \cos(\vec{W}, \vec{n}) = \frac{W_n}{W} \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

Przykład 19

Mając dane równania ruchu punktu M o masie m w postaci  $x = r \cos \omega t$ ,  $y = r \sin \omega t$ , znaleźć siłę wypadkową przyłożoną do punktu.

Rozwiązanie

Rugując czas t z równań ruchu znajdujemy równanie toru punktu M

$$x^2 + y^2 = r^2$$

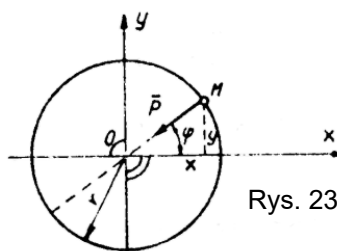
Torem punktu M jest okrąg o promieniu r (rys.23).

Rzuty przyspieszenia punktu na osie współrzędnych są równe

$$\ddot{x} = -r \omega^2 \cos \omega t$$

$$\ddot{y} = -r \omega^2 \sin \omega t$$

Rzuty siły wypadkowej wynoszą



$$W_x = m \ddot{x} = -m r \omega^2 \cos \omega t$$

$$W_y = m \ddot{y} = -m r \omega^2 \sin \omega t$$

Wartości siły  $\bar{P}$  i jej kierunek obliczamy wg wzorów

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = m r \omega^2 \sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} = m r \omega^2$$

$$\cos(\bar{W}, \bar{i}) = \frac{W_x}{W} = -\cos \omega t = -\frac{x}{r} = -\cos \varphi$$

$$\cos(\bar{W}, \bar{j}) = \frac{W_y}{W} = -\sin \omega t = -\frac{y}{r} = -\sin \varphi$$

Kąty między siłą  $\bar{W}$  a osiami współrzędnych są równe

$$(\bar{W}, \bar{i}) = 180^\circ - \varphi, \quad (\bar{W}, \bar{j}) = 90^\circ + \varphi$$

Siła  $\bar{W}$  jest skierowana stale do początku układu współrzędnych

- b. W prostym zadaniu dynamiki znając siły działające na punkt materialny i jego masę a także położenie początkowe punktu i jego prędkość początkową, należy wyznaczyć równanie ruchu punktu.

Celem rozwiązania tego zadania należy w lewej części równań:

$$m \ddot{x} = \sum_{i=1}^n P_{ix}, \quad m \ddot{y} = \sum_{i=1}^n P_{iy}, \quad m \ddot{z} = \sum_{i=1}^n P_{iz} \quad (9.4)$$

$$m \frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n P_{ir}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum_{i=1}^n P_{in}, \quad 0 = \sum_{i=1}^n P_{ib} \quad (9.5)$$

podstawić wartość masy  $m$ , a w prawej części równań sumy rzutów sił przyłożonych do punktu, następnie otrzymane równania dwukrotnie scałkować względem czasu. Zagadnienie to ma bardzo ważne znaczenie praktyczne i w ogólnym przypadku jest bardziej złożone niż zadanie odwrotne.

Podczas całkowania każdego z równań różniczkowych ruchu punktu otrzymujemy dwie stałe całkowania, a więc przy całkowaniu trzech równań różniczkowych ruchu punktu będziemy mieć sześć stałych całkowania. Stałe te wyznacza się z warunków początkowych ruchu. Niech w chwili początkowej  $t = t_0$  będą znane współrzędne punktu i rzuty prędkości tego punktu na osie, to znaczy dla

$$\begin{aligned} t = t_0, \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0 \end{aligned} \quad (9.6)$$

Warunki początkowe (9.6) podstawiamy do równań będących ogólnymi rozwiązaniami równań różniczkowych ruchu punktu. Z równań tych wyznaczamy stałe całkowania  $c_1, c_2, \dots, c_6$  w zależności od początkowych współrzędnych i rzutów prędkości początkowej. Podstawiając otrzymane wartości stałych całkowania do ogólnych rozwiązań równań różniczkowych ruchu punktu, otrzymamy równania ruchu punktu w postaci

$$\begin{aligned} x &= f_1(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ y &= f_2(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ z &= f_3(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \end{aligned} \quad (9.7)$$

Przykład 20

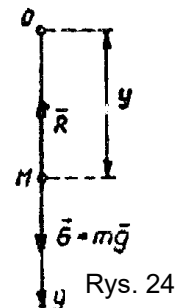
Rozpatrzmy ruch ciała spadającego pionowo w dół pod wpływem siły ciężkości w powietrzu stawiającym opór proporcjonalny do prędkości. Przyjmiemy, że ciało spada bez początkowej prędkości z punktu 0, przyjętego za początek osi współrzędnych. Oś  $y$  skierowana jest pionowo w dół (rys.24).

## Rozwiązanie

Warunki początkowe i równanie ruchu mają postać dla

$$t = 0, \quad y = y_0 = 0, \quad v = v_y = \dot{y}_0 = 0$$

$$m\ddot{y} = mg - R$$



Rys. 24

Ponieważ równanie nasze dotyczy ciała spadającego, siła  $\bar{R}$  skierowana jest przeciwnie do osi  $Oy$ , przy czym zgodnie z założeniem siła jest proporcjonalna do prędkości, więc  $R = \alpha v$ , gdzie  $\alpha$  – współczynnik proporcjonalności. Podstawiając wyżej określoną wartość siły  $\bar{R}$  do równania ruchu i uwzględniając jeszcze, że

$$\ddot{y} = \frac{dv}{dt}$$

po podzieleniu stronami tego równania przez masę  $m$  otrzymujemy

$$\frac{dv}{dt} = g - kv$$

gdzie:  $k = \frac{\alpha}{m}$

Równanie to możemy scałkować po rozdzieleniu zmiennych. Po scałkowaniu i przyjęciu, że

$$v < \frac{g}{k}$$

$$\ln u = -kt + c_1$$

gdzie:  $u = g - kv$

czyli:

$$\ln(g - kv) = -kt + c_1$$

Stałą całkowania  $c_1$  znajdujemy z warunków początkowych. Dla  $t = 0$ ,  $y_0 = v_0 = 0$ ,  $\ln g = c_1$

Podstawiając za  $c_1 = \ln g$  otrzymamy

$$\ln(g - kv) = -kt + \ln g \quad \text{lub} \quad \ln\left(\frac{g - kv}{g}\right) = -kt$$

czyli

$$\frac{g - kv}{g} = e^{-kt} \quad \text{lub} \quad 1 - \frac{k}{g}v = e^{-kt}$$

skąd

$$v = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt})$$

Przy  $t \rightarrow \infty$ ,  $e^{-kt} \rightarrow 0$ ,  $v \rightarrow \frac{g}{k}$ , tzn. prędkość spadania zdąża do prędkości granicznej

$$v_{gr} = \frac{g}{k}$$

Przy prędkości  $v_{gr} = \frac{g}{k}$  siła oporu staje się równa sile ciężkości ciała, gdyż

$$R = mkv_{gr} = mk \frac{g}{k} = G$$

Równanie  $v = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt})$  można zapisać w postaci

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}) \quad \text{lub} \quad dy = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}) dt$$

Całkując otrzymamy równanie masy

$$y = \frac{g}{k} t + \frac{g}{k^2} e^{-kt} + c_2$$

Ponieważ dla  $t = 0$ ,  $y_0 = 0$  więc stała całkowania  $c_2$  wynosi

$$c_2 = -\frac{g}{k^2}$$

a zatem

$$y = \frac{g}{k} t - \frac{g}{k^2} (1 - e^{-kt})$$

### 9.1. Odwrotne zadanie dynamiki punktu

1. Punkt materialny o masie  $m = 1/3$  [kg] porusza się zgodnie z równaniami  $x = 0,3 \cos 3t$ ,  $y = 0,1 \sin 3t$  ( $x$ ,  $y$  – w metrach,  $t$  – w sekundach). Wyznaczyć siłę  $\vec{P}$ , pod której działaniem zachodzi ruch punktu i wykazać, że jest ona skierowana w stronę przeciwną do zwrotu wektora promienia wodzącego  $\vec{r}$  punktu.

2. Ruch punktu materialnego masie  $m$  od pewnej chwili odbywa się po okręgu o promieniu  $r$  zgodnie z równaniem:  $s = b + 2r \ln t$ , gdzie  $b$  – pewna stała. Wyznaczyć siłę wypadkową działającą na punkt w funkcji czasu.

3. Suwnica porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, osiągając  $2 \text{ [m/s]}$  po czasie  $1,5 \text{ [s]}$  od początku ruchu. Wyznaczyć w tej chwili kąt  $\alpha$  odchylenia liny, do której przymocowany jest ciężar  $\bar{G}$  od pionu, pomijając ciężar liny.

4. Ciało podnoszone jest pionowo w górę ruchem jednostajnie przyspieszonym za pomocą dźwigu tak, że po upływie  $t$  – sekund przebywa drogę  $s$  – metrów od położenia równowagi. Wyznaczyć masę graniczną ciała, jeżeli siła rozrywająca linę wynosi  $\bar{R}$ .

5. Ciało o masie  $2000 \text{ [kg]}$  podnoszone jest ruchem jednostajnie przyspieszonym pionowo w górę za pomocą liny. Wyznaczyć siłę w linie, jeżeli po upływie  $4$  sekund ciało podniesione zostało o  $8$  metrów.

6. Przenośnik taśmowy podnosi rudę przy kącie pochylenia taśmy do poziomu równym  $\alpha$ . Jaki powinien być współczynnik tarcia, aby ruda nie zsuwała się z taśmy, kiedy porusza się ona z przyspieszeniem „ $a$ ”?

7. Punkt materialny o masie  $m$  porusza się po okręgu o promieniu  $r$  zgodnie z równaniem  $s = r e^{2t}$ . Wyznaczyć siłę wypadkową działającą na punkt w funkcji czasu.

8. Ruch punktu materialnego o masie  $0,2 \text{ [kg]}$  odbywa się zgodnie z równaniem  $x = 3 \cos 2\pi t$ ,  $y = 4 \sin \pi t$  ( $x, y$  – w metrach,  $t$  – w sekundach). Wyznaczyć rzuty wypadkowej działającej na punkt w zależności od jej współrzędnych.

9. Kulka o masie  $0,2 \text{ [kg]}$  spada pod działaniem siły ciężkości zgodnie z równaniem  $x = 4,90 t - 2,45 (1 - e^{-2t})$  ( $x$  – w metrach,  $t$  – w sekundach), oś  $Ox$  skierowana jest pionowo w dół. Wyznaczyć siłę  $\bar{R}$  oporu powietrza działającą na kulkę w zależności od jego prędkości  $\bar{v}$ , przyjmując  $g = 9,8 \text{ [m/s]}$ .

10. Ciało o masie  $m$  wciągane jest za pomocą wciągarki po równi pochyłej o kącie pochylenia  $\alpha$ . Wyznaczyć siłę w linie, jeżeli bęben

wciągarki o promieniu  $r$  obraca się zgodnie z równaniem:  $\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2$ , ( $t$  – w sekundach,  $\varphi$  – w radianach),

## 9.2. Proste zadanie dynamiki punktu.

1. Swobodny punkt materialny o masie  $m$  porusza się po prostej z prędkością początkową  $\bar{v}_0$ . Na punkt działa tylko siła oporu  $\bar{R}$ , skierowana przeciwnie do prędkości o wartości  $R = \alpha \sqrt[3]{v}$  ( $\alpha$  – stała). Wyznaczyć czas  $t_1$  od chwili ruszenia punktu do zatrzymania się i drogę  $s$  przebytą przez punkt.

2. Przy założeniach poprzedniego zadania wyznaczyć w zależności prędkości od przebytej odległości  $x$ , tzn.  $v = v(x)$ .

3. Ciało porusza się w dół po równi pochyłej o kącie  $\alpha$ . Znaleźć czas ruchu ciała, jeżeli w chwili początkowej jego prędkość była równa zero, współczynnik tarcia  $\mu = \text{const}$ , a długość drogi  $s$ .

4. Na ciało o masie  $m$  znajdujące się na chropowatej poziomej płaszczyźnie w czasie  $t_1$  sekund działa pozioma siła  $\bar{Q} = \text{const}$ . Wyznaczyć odległość  $s$ , jaka przebędzie ciało do chwili zatrzymania się, jeżeli współczynnik tarcia ciała o powierzchnię wynosi  $\mu$ . Początkowa prędkość ciała jest równa zero.

5. Wyznaczyć równanie ruchu punktu materialnego o masie  $m$ , przyciąganego jednorodnym poziomym zmiennym polem magnetycznym, jeżeli siła tego pola  $P = P_0 \sin \omega t$  ( $P_0$ ,  $\omega$  – stałe). Przyjąć początkowe położenie punktu w początku układu współrzędnych, oś  $Ox$  – skierować poziomo, a oś  $Oy$  – pionowo w dół. Początkowa prędkość punktu jest równa zero.

6. Rozwiązać poprzednie zadanie dla przypadku pionowego pola magnetycznego.

7. Punkt materialny o masie  $m$  poruszający się po poziomej prostej ma w pewnej chwili prędkość  $\bar{v}_0$ . Wyznaczyć jej prędkość po upływie  $t$  – sekund, a także przebytą drogę  $s$  jeżeli wartość siły

oporów ruchu wynosi  $R = \alpha m v^2$  ( $m$  – masa,  $\alpha$  – stała). Zastanowić się, czy punkt zatrzyma się pod działaniem siły  $\vec{R}$ ?

8. Siła działająca na samochód o masie  $m$  wyraża się wzorem:  $R = \beta - \alpha v$  ( $\alpha, \beta$  – stałe,  $v$  – prędkość). Wyznaczyć siłę  $\vec{R}$  w funkcji czasu.

9. Punkt materialny o masie  $m$  jest przyciągany do nieruchomego środka (punktu) z siłą odwrotnie proporcjonalną do odległości w potęgze trzeciej między nimi, przy czym współczynnik proporcjonalności wynosi  $\alpha$ . Znaleźć, po jakim czasie punkty się pokryją, jeżeli początkowa odległość między nimi wynosiła  $x_0$ , a początkowa prędkość  $\vec{v}_0 = 0$ .

10. Punkt materialny  $M$  o masie  $m$  jest przyciągany do środka  $O$  z siłą o wartości  $P = \frac{\alpha m}{x^4}$  ( $x = OM$ ,  $\alpha$  – stała). W chwili początkowej odległość  $OM_0 = x_0$ ,  $v_0 = 0$ . Wyznaczyć prędkość punktu w chwili gdy  $OM = \frac{x_0}{2}$

### 9.3. Odpowiedzi.

#### Ad.9.1. Odwrotne zadanie dynamiki punktu

Ad 1)  $P = 3 \sqrt{x^2 + y^2} = 3r, \quad \vec{P} = -3(\vec{i}x + \vec{j}y) = -3\vec{r}$

Ad 2)  $P = \frac{2\sqrt{5}rm}{t^2}$

Ad 3)  $\alpha = 7^\circ 45'$

Ad 4)  $m = \frac{Rt^2}{2s + gt^2}$

Ad 5)  $S = 21,6 \cdot 10^3 \text{ [N]}$

Ad 6)  $\mu > \frac{a}{g \cos \alpha} + \tan \alpha$

Ad 7)  $W = 4mr e^{2t} \sqrt{1 + e^{4t}}$

Ad 8)  $W_x = -4\pi^2 mx, \quad W_y = -\pi^2 my, \quad W = \pi^2 m \sqrt{16x^2 + y^2}$

Ad 9)  $R = 0,4x = 0,4v$



$$\text{Ad 10) } S = m g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha + \frac{\varepsilon \pi}{g})$$

Ad. 9.2. Proste zadanie dynamiki punktu.

$$\text{Ad 1) } t_1 = \frac{3m}{2\alpha} v_0^{\frac{2}{3}}, \quad x = \frac{3m}{5\alpha} \left[ v_0^{\frac{5}{3}} - \left( U^{\frac{2}{3}} - \frac{2\alpha t}{3m} \right)^{\frac{2}{3}} \right], \quad s = \frac{3m}{5\alpha} v^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Ad 2) } v^{\frac{5}{3}} = v_0^{\frac{5}{3}} - \frac{5\alpha}{3m} x$$

$$\text{Ad 3) } t = \frac{2s}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}$$

$$\text{Ad 4) } s = \frac{Q(Q-mg)}{2\mu m^2 g} t_1^2 \quad \text{Ruch jest możliwy, gdy } Q > \mu m g$$

$$\text{Ad 5) } x = \frac{P_0}{m\omega} \left( t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right), \quad y = \frac{g t^2}{2}$$

$$\text{Ad 6) } x = 0, \quad y = \frac{g t^2}{2} + \frac{P_0}{m\omega} \left( t + \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)$$

$$\text{Ad 7) } v = \frac{v_0}{1 + \alpha v_0 t}, \quad s^x = \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \alpha v_0 t)$$

$$\text{Ad 8) } R = \beta \cdot e^{\frac{-\alpha t}{m}}$$

$$\text{Ad 9) } t = \sqrt{\frac{m}{g}} x_0^2$$

$$\text{Ad 10) } v = \frac{\sqrt{14\alpha}}{x_0 \sqrt{3x_0}}$$