

7. RUCH PŁASKI BRYŁY

- a. Równania ruchu figury płaskiej w nieruchomym układzie współrzędnych mają postać

$$x_0 = x_0(t), \quad y = y_0(t), \quad \varphi = \varphi(t) \quad (7.1)$$

gdzie: x_0, y_0 – współrzędne punktu 0 przyjętego za biegun, φ – kąt między osią 0_1x a osią 0_ξ sztywnie związaną z figurą płaską (rys.16. str.81).

Równania ruchu dowolnego punktu, np. punktu A figury płaskiej mają postać:

$$\begin{aligned} x_A &= x_0 + \xi \cos \varphi - \xi \sin \varphi \\ y_A &= y_0 + \xi \sin \varphi + \xi \cos \varphi \end{aligned} \quad (7.2)$$

- b. Prędkości dwóch dowolnych punktów 0 i A związane są między sobą zależnością (rys. 17, str.81)

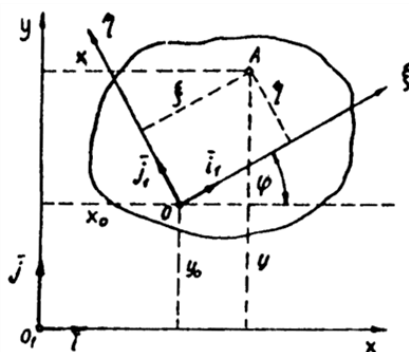
$$\bar{v}_A = \bar{v}_0 + \bar{v}_{AO}, \quad \bar{v}_{AO} = \bar{\omega} \times \overline{0A} \quad (7.3)$$

gdzie: v_{AO} – jest prędkością punktu A względem 0, skierowaną prostopadle do odcinka 0A: $v_{AO} = \omega \cdot 0A$

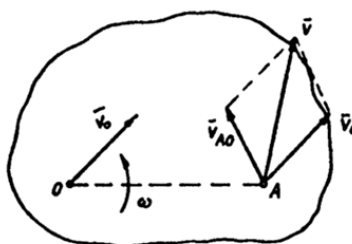
$$\bar{v}_A = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{0A} \quad (7.4)$$

Rzutując równanie (7.4) na nieruchomy i ruchomy układ współrzędnych otrzymamy

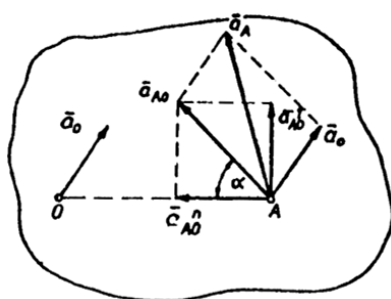
$$\begin{aligned} v_{AX} &= \dot{x}_0 - \omega (y - y_0) \\ v_{Ay} &= \dot{y}_0 + \omega (x - x_0) \end{aligned} \quad (7.5)$$



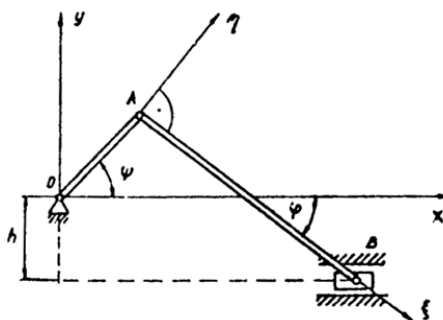
Rys. 16



Rys. 17



Rys. 18



Rys.19

$$v_{A\xi} = \dot{x}_0 \cos \varphi - \dot{y}_0 \sin \varphi - \omega \cdot \eta \quad (7.6)$$

$$v_{A\eta} = -\dot{x}_0 \sin \varphi - \dot{y}_0 \cos \varphi - \omega \cdot \xi$$

Wartość prędkości i jej kierunek oblicza się ze wzorów:

$$v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} = \sqrt{v_{A\xi}^2 + v_{A\eta}^2}$$

$$\cos(\bar{v}_A, \bar{i}) = \frac{v_{Ax}}{|\bar{v}_A|}, \quad \cos(\bar{v}_A, \bar{j}) = \frac{v_{Ay}}{|\bar{v}_A|} \quad (7.7)$$

$$\cos(\bar{v}_A, \bar{i}_1) = \frac{v_{A\xi}}{|\bar{v}_A|}, \quad \cos(\bar{v}_A, \bar{j}_1) = \frac{v_{A\eta}}{|\bar{v}_A|}$$

c. Położenie chwilowego środka obrotu w układzie nieruchomym Oxy i ruchomym $O_1\eta_1$ wyznacza się ze wzorów:

$$x = x_0 - \frac{\dot{y}_0}{\omega}, \quad y = y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega} \quad (7.8)$$

$$\xi = \frac{x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi}{\omega}, \quad \eta = \frac{x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi}{\omega} \quad (7.9)$$

d. Przyspieszenia dwóch dowolnych punktów 0 i A figury płaskiej (rys. 18, str. 81) związane są ze sobą zależnością

$$\bar{a}_A = \bar{a}_0 + \bar{a}_{A0}^n + \bar{a}_{A0}^\tau \quad (7.10)$$

gdzie: $a_{A0}^n = \omega^2 \cdot 0A$, $a_{A0}^\tau = \varepsilon 0A$

ω i ε – wartość prędkości Katowej chwilowej i przyspieszenia kąowego chwilowego

e. Jeżeli znane jest położenie chwilowego środka przyspieszeń Q, którego przyspieszenie w danej chwili jest równe zero, to przyspieszenie dowolnego punktu A wyznacza się ze wzoru:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{AQ}^n + \bar{a}_{AQ}^\tau \quad (7.11)$$

przy czym

$$a_A = AQ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (7.12)$$

Jeżeli w pewnej chwili znane jest przyspieszenie punktu A oraz wielkości ω i ε , to celem znalezienia punktu Q należy obrócić wektor \bar{a}_A w kierunku obrotu figury, jeżeli jest on przyspieszany (i w przeciwnym kierunku – jeżeli obrót jest opóźniony), o kąt ostry α wyznaczony ze wzoru:

$$\alpha = \arctg \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \quad (7.13)$$

Na otrzymanej półprostej należy odmierzyć odcinek

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \quad (7.14)$$

Koniec Q tego odcinka jest chwilowym środkiem przyspieszeń w danej chwili.

Rzuty przyspieszenia \bar{a}_A na nieruchome i ruchome osie współrzędnych oraz wartości i kierunek tego przyspieszenia wyznacza się ze wzorów

$$\begin{aligned} a_{Ax} &= \ddot{x}_0 - \varepsilon (y - y_0) - \omega^2 (x - x_0) \\ a_{Ay} &= \ddot{y}_0 - \varepsilon (x - x_0) - \omega^2 (y - y_0) \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} a_{A\xi} &= \ddot{x}_{0\xi} - \varepsilon \cdot \eta - \omega^2 \xi \\ a_{A\eta} &= \ddot{y}_{0\eta} + \varepsilon \cdot \eta - \omega^2 \eta \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} a_A &= \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = \sqrt{a_{A\xi}^2 + a_{A\eta}^2} \\ \cos(\bar{a}_A, \bar{i}) &= \frac{a_{Ax}}{|\bar{a}_A|}, & \cos(\bar{a}_A, \bar{j}) &= \frac{a_{Ay}}{|\bar{a}_A|} \\ \cos(\bar{a}_A, \bar{i}_1) &= \frac{a_{A\xi}}{|\bar{a}_A|}, & \cos(\bar{a}_A, \bar{j}_1) &= \frac{a_{A\eta}}{|\bar{a}_A|} \end{aligned} \quad (7.17)$$

Przykład 15

Dany jest mechanizm korbowo-wodzikowy jak na rys. 19, str.81. Mając dane: h , $\varphi = kt$, $OA = r$, $AB = l$ (k – stała) wyznaczyć równanie ruchu płaskiego łącznika AB.

Rozwiązanie

Równania ruchu punktu A przyjętego za biegun mają postać

$$\begin{aligned} x_A &= OA \cos \varphi = r \cos kt \\ y_A &= OA \sin \varphi = r \sin kt \end{aligned}$$

Trzecim równaniem jest $\varphi = \varphi(t)$ obrotu łącznika AB. Rzutując AB na oś Oy otrzymamy

$$AB \sin \varphi = OA \sin \varphi + h, \quad \text{gdzie: } \varphi = kt$$

$$\text{skąd: } \sin \varphi = \frac{r}{l} \sin kt + \frac{h}{l}$$

Przykład 16

Koniec pręta BD jest zamocowany przegubowo do wozika B (rys.20a, str. 86). Przechodzi on przez cały czas ruchu przez cylindryczne łożysko A, które może się obracać wokół osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Odległość $OA = b$. Wyznaczyć równanie centroidy nieruchomej i ruchomej pręta.

Rozwiązanie

Współrzędne chwilowego środka obrotu w układzie osi x, y (rys. 20a, b, str. 86) mają postać

$$x_0 = AB \cos \varphi = AO \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{b}{\tan \varphi}$$

$$y_0 = \frac{AB}{\sin \varphi} = \frac{AO}{\sin^2 \varphi} = \frac{b}{\sin^2 \varphi}$$

Rugując z tych równań parametr φ , otrzymamy równanie centroidy nieruchomej

$$x_0^2 = b^2 \frac{1 - \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}$$

a ponieważ

$$\sin^2 \varphi = \frac{b}{y_0}$$

więc

$$x_0^2 = b (y_0 - b)$$

Jest to parabola o osi równoległej do osi Oy .

Współrzędne chwilowego środka obrotu w układzie ruchomych współrzędnych $O \xi \eta$ są następujące:

$$\xi = BC \cdot \cos \varphi = \frac{b}{\sin^2 \varphi} \cdot \cos \varphi$$

$$\eta = BC \cdot \sin \varphi = AB = \frac{b}{\sin \varphi}$$

ponieważ

$$\sin \varphi = \frac{b}{\eta}$$

więc

$$\xi = \frac{\eta^2}{b} \sqrt{1 - \sin^2} = \frac{\eta^2}{b} \sqrt{1 - \frac{b^2}{\eta^2}}$$

Stąd równanie centroidy ruchomej otrzymujemy w postaci

$$b^2 \xi^2 = \eta^2 (\eta^2 - b^2)$$

Przykład 17

Walec o promieniu $r = 0,4$ (rys. 21a, str. 86) toczy się bez poślizgu po poziomej płaszczyźnie. Wartość prędkości i przyspieszenia jego osi w danej chwili są równe: $v_0 = 0,4$ [m/s], $a_0 = 0,2$ [m/s²]. Krążek o promieniu $R = 0,5$ [m] jest sztywno związany z walcem. Wyznaczyć w danej chwili prędkość i przyspieszenie punktów A i B. Znaleźć także położenie chwilowego środka przyspieszeń.

Rozwiązanie

Wiedząc, że punkt C jest chwilowym środkiem prędkości, wartość prędkości kątovej i przyspieszenia kątowego wyznaczamy ze wzorów

$$\omega = \frac{v_0}{OC} = \frac{v_0}{r} = \frac{0,4}{0,4} = 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

$$\varepsilon = \left| \frac{d\omega}{dt} \right| = \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{v_0}{r} \right) \right| = \left| \frac{1}{r} \frac{dv_0}{dt} \right| = \frac{a_0}{r} = 0,5 \text{ [s}^{-2}\text{]}$$

Prędkość punktu A i B (rys. 21 a) wyznaczamy ze wzorów

$$v_A = \omega \cdot AC = \omega \cdot (R - r) = 1 (0,5 - 0,4) = 0,1 \text{ m/s}$$

$$v_B = \omega \cdot BC = \omega \cdot (R + r) = 1 (0,5 + 0,4) = 0,9 \text{ m/s}$$

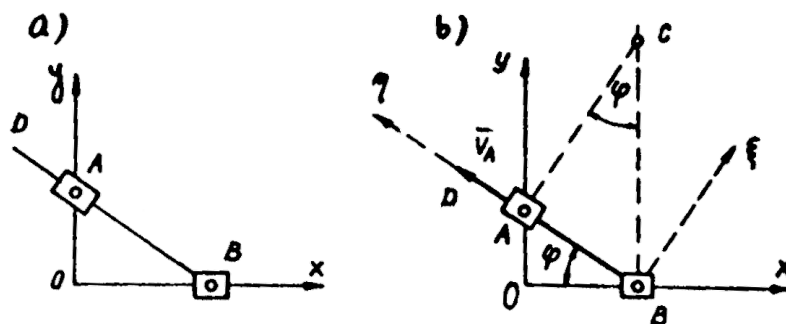
Przyspieszenie punktu A i B (rys.21b) wyznaczamy ze wzorów

$$\bar{a}_A = \bar{a}_0 + \bar{a}_{A0}^n + \bar{a}_{A0}^t$$

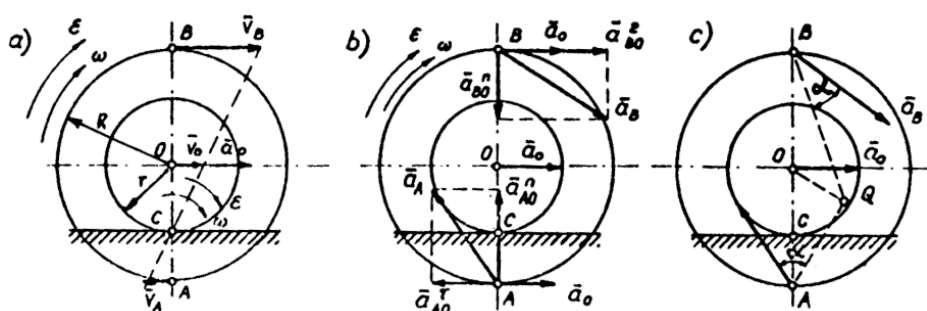
$$\bar{a}_B = \bar{a}_0 + \bar{a}_{B0}^n + \bar{a}_{B0}^t$$

$$a_{A0}^n = a_{B0}^n = \omega^2 \cdot R = 1^2 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ m/s}^2$$

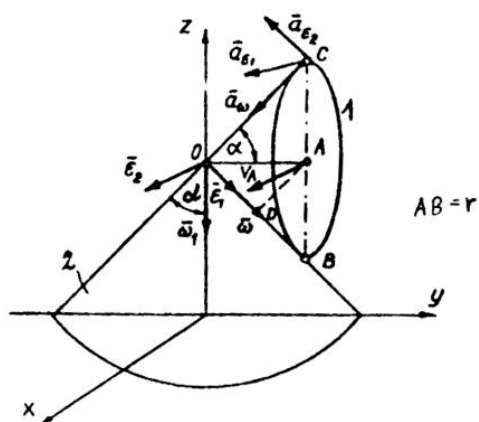
$$a_{A0}^t = a_{B0}^t = \varepsilon \cdot R = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 \text{ m/s}^2$$



Rys. 20



Rys. 21



Rys. 22

$$a_A = \sqrt{(a_0 - a_{A0}^r)^2 + (a_{A0}^n)^2} = \sqrt{(0,2 - 0,25)^2 + 0,5^2} = 0,50 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = \sqrt{(a_0 + a_{B0}^r)^2 + (a_{B0}^n)^2} = \sqrt{(0,2 + 0,25)^2 + 0,5^2} = 0,67 \text{ m/s}^2$$

Przyjmując punkt 0 za biegun znajdziemy kąt α i odległość 0Q (rys. 21c)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{0,5}{1^2} = 0,5$$

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} = 26^\circ 34'$$

$$0Q = \frac{a_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{0,2}{\sqrt{0,5^2 + 1^4}} = 0,179$$

f. Równania ruchu kulistego mają postać

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t) \quad (7.18)$$

gdzie: ψ, θ, φ – kąty Eulera wyznaczające położenie układu $0 \xi \eta \zeta$, sztywnie związanego z poruszającym się ciałem względem nieruchomego układu $0 x y z$.

g. Rzuty wektora chwilowej prędkości kątowej $\bar{\omega}$ na nieruchome osie współrzędnych mają postać

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_y &= -\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_z &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (7.20)$$

Wartość prędkości kątowej chwilowej wynosi

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \theta} \quad (7.21)$$

h. Równania chwilowej osi obrotu w układzie nieruchomym i ruchomym mają postać

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \quad (7.22)$$

$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta}$$

i. Wektor chwilowego przyspieszenia kątownego $\bar{\varepsilon}$ wyznacza się jako prędkość końca wektora $\bar{\omega}$, tzn.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d \bar{\omega}}{d t} \quad (7.23)$$

Jeżeli oznaczymy przez \bar{I}_0 wektor jednostkowy chwilowej osi obrotu, to $\bar{\omega} = \omega \bar{I}_0$, skąd

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d \omega}{d t} \bar{I}_0 + \omega \frac{d \bar{I}_0}{d t} \quad (7.24)$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{d \omega}{d t} \bar{I}_0, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \frac{d \bar{I}_0}{d t} \quad (7.25)$$

mamy

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 \quad (7.26)$$

Wartość przyspieszenia ε wynosi

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \quad (7.27)$$

Wektor $\bar{\varepsilon}_1$ skierowany jest wzdłuż osi obrotu i charakteryzuje prędkość zmiany wektora $\bar{\omega}$ tylko co do wartości. Wektor $\bar{\varepsilon}_2$ charakteryzuje prędkość zmiany $\bar{\omega}$ tylko co do kierunku. Jeżeli oznaczymy przez $\bar{\omega}_1$ prędkość kątową obrotu wektora $\bar{\omega}$, to na podstawie wzorów Poissona

$$\frac{d\bar{\mathbf{i}}_0}{dt} = \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{i}}_0$$

wówczas

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 = \bar{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \bar{\boldsymbol{\omega}} \quad (7.28)$$

Wektory $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ i $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ przyłożone są w nieruchomym punkcie 0.

j. Prędkość punktu w ruchu obrotowym dokoła chwilowej osi obrotu wyznaczy się ze wzoru

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} \quad (7.29)$$

Wartość tej prędkości wynosi

$$v = \omega r \sin \gamma = \omega h_{\bar{\boldsymbol{\omega}}} \quad (7.30)$$

Rzuty prędkości punktu na nieruchome i ruchome osie są równe

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned} v_\xi &= \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta \\ v_\eta &= \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta \\ v_\zeta &= \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi \end{aligned} \quad (7.32)$$

k. Przyspieszenie dowolnego punktu A bryły jest równe sumie geometrycznej przyspieszenia obrotowego i dwuosiowego.

$$\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}_\varepsilon + \bar{\mathbf{a}}_\omega \quad (7.33)$$

$$\mathbf{a}_\omega = \omega^2 h_\omega, \quad \mathbf{a}_\varepsilon = \varepsilon \cdot h_\varepsilon \quad (7.34)$$

gdzie: h_ω – odległość punktu A od chwilowej osi obrotu

h_ε – odległość punktu A od prostej, wzdłuż której skierowany jest wektor ε

wektor \bar{a}_ω jest prostopadły do chwilowej osi. Wartość i kierunek wektora \bar{a}_ε według wzoru

$$\bar{a}_\varepsilon = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} \quad (7.35)$$

Analogicznie do (7.29) można stwierdzić, że \bar{a}_ε skierowane jest tak, jak by była skierowana prędkość punktu, gdyby bryła obracała się wokół linii działania wektora jako względem osi. Jeżeli $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2$, to

$$\bar{a}_\varepsilon = \bar{\varepsilon}_1 \times \bar{r} + \bar{\varepsilon}_2 \times \bar{r} = \bar{a}_{\varepsilon 1} + \bar{a}_{\varepsilon 2} \quad (7.36)$$

Rzuty przyspieszenia punktu w ruchu kulistym bryły na nieruchome i ruchome osie współrzędnych są równe

$$\begin{aligned} a_x &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x \\ a_y &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_y (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y \\ a_z &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_z (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$\begin{aligned} a_\xi &= \varepsilon_\eta \zeta - \varepsilon_\zeta \eta + \omega_\xi (\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \xi \\ a_\eta &= \varepsilon_\zeta \xi - \varepsilon_\xi \zeta + \omega_\eta (\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \eta \\ a_\zeta &= \varepsilon_\xi \eta - \varepsilon_\eta \xi + \omega_\zeta (\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \zeta \end{aligned} \quad (7.38)$$

Wartość całkowitego przyspieszenia jest równa

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_\xi^2 + a_\eta^2 + a_\zeta^2} \quad (7.39)$$

Przykład 18

Stożek 1 o promieniu podstawy $r = 2$ cm toczy się bez poślizgu po nieruchomym stożku 2 tak, że jego punkt 0 jest nieruchomy a środek podstawy A porusza się z prędkością \bar{v}_A , której wartość wynosi $v_A = t$ [cm/s]. Wyznaczyć w chwili $t = 2$ [s] wartość przyspieszenia punktu C jeżeli $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ (rys.22, str.86)

Rozwiązanie

Chwilową osią obrotu jest 0B. Chwilowa prędkość kątowna $\bar{\omega}$ jest skierowana wzdłuż tej osi. Wartość chwilowej prędkości kątowej wynosi

$$\omega = \frac{v_A}{AD} = \frac{t}{r \cos \alpha} = \frac{\sqrt{2} t}{2} [\text{s}^{-1}]$$

Chwilowe przyspieszenie kątowe $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2$. Wektor $\bar{\varepsilon}_1$ skierowany jest wzdłuż 0B w tym samym kierunku co $\bar{\omega}$:

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{2} [\text{s}^{-2}]$$

$$\omega_1 = \frac{v_A}{AD} \quad \text{ponieważ } \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \text{to } AD = 0A$$

$$\omega_1 = \frac{v_A}{0A} = \frac{t}{2} [\text{s}^{-1}]$$

Wektor $\bar{\omega}_1$ skierowany jest wzdłuż osi stożka 2 w dół

$$\varepsilon_2 = \omega \cdot \omega_1 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{t^2}{4} [\text{s}^{-2}]$$

Wektor $\bar{\varepsilon}_2$ skierowany jest prostopadle do płaszczyzny 0AB i równoległy do wektora \bar{v}_A .

Przyspieszenie punktu C jest równe

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{\varepsilon_1} + \bar{a}_{\varepsilon_2}$$

Wektor $\bar{a}_{\varepsilon_1} = \bar{\varepsilon}_{\varepsilon_1} \times \overline{0C}$ jest skierowany prostopadle do płaszczyzny przechodzącej przez wektory $\bar{\varepsilon}_1$ i $\overline{0C}$ w stronę określoną regułą prawoskrętną, tzn. jest on równoległy do \bar{v}_A . Wartość \bar{a}_{ε_1} wynosi

$$a_{\varepsilon_1} = \varepsilon_1 \cdot 0C \cdot \sin 90^\circ = 2 \text{ cm/s}^2$$

Wektor $\bar{a}_{\varepsilon 1} = \bar{\varepsilon}_2 \times \overline{OC}$ skierowany jest prostopadle do OC w płaszczyźnie $C0B$ a jego wartość wynosi

$$a_{\varepsilon 2} = \varepsilon_2 \cdot OC = \frac{\sqrt{2}}{2} t^2$$

Wektor \bar{a}_{ω} skierowany jest wzdłuż tworzącej stożka OC od punktu C do punktu O , ponieważ $OC \perp OB$, wartość jego wynosi

$$a_{\omega} = OC \cdot \omega^2 = \sqrt{2} t^2$$

Ponieważ \bar{a}_{ω} , $\bar{a}_{\varepsilon 1}$ i $\bar{a}_{\varepsilon 2}$ są wzajemnie prostopadłe więc

$$a_C = \sqrt{a_{\varepsilon 1}^2 + a_{\varepsilon 2}^2 + a_{\omega}^2} = \sqrt{4 + \frac{t^4}{2} + 2t^4}$$

Dla $t = 2$ a otrzymamy

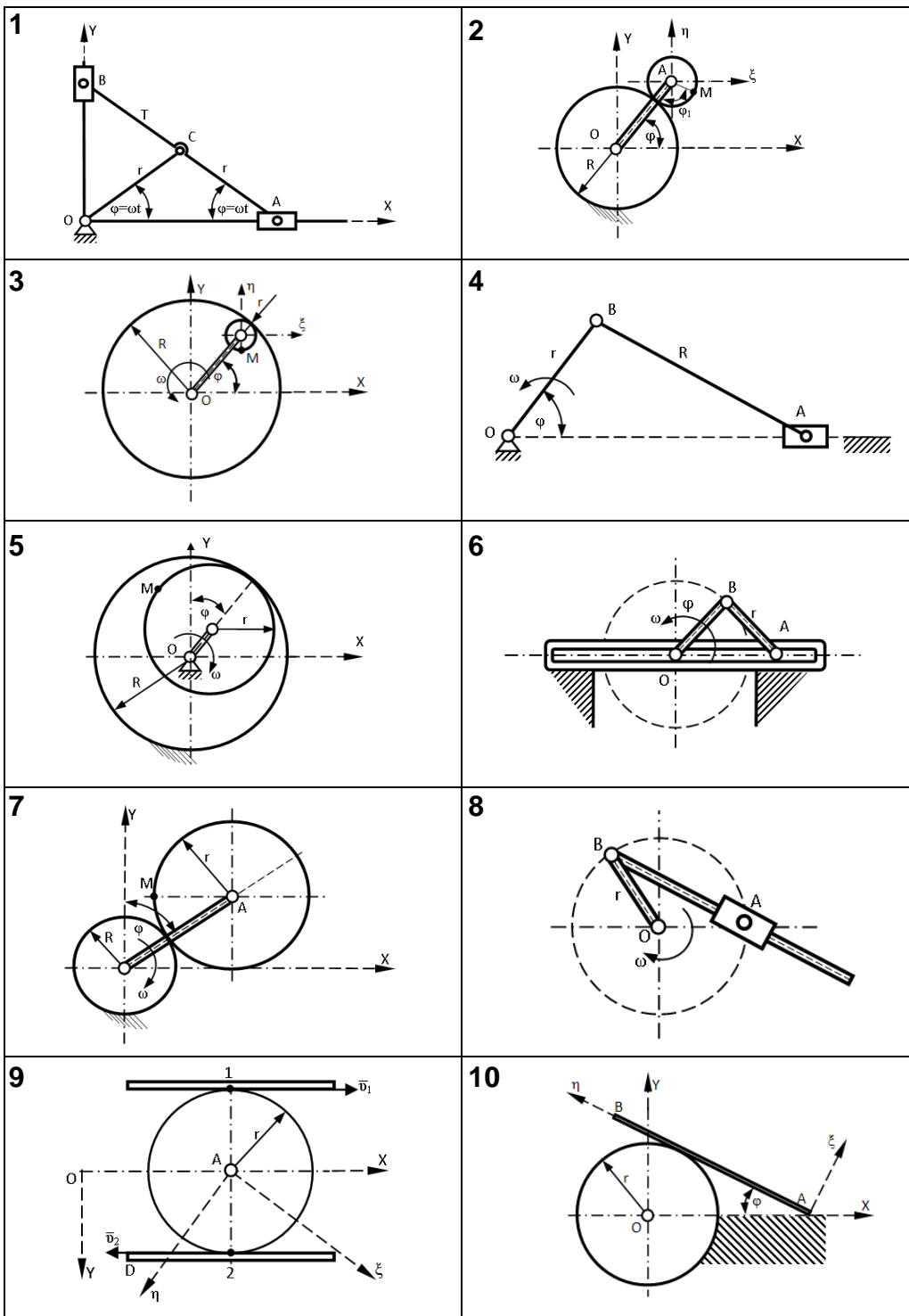
$$a_C = 2\sqrt{11} \text{ cm/s}^2$$

Wyznaczyć równanie ruchu punktu M . Znaleźć także centroidę nieruchomą i ruchomą. Dane do obliczeń zestawiono w tabeli.

7.1. Równania ruchu płaskiego. Centroidy.

Wyznaczyć równania ruchu płaskiego bryły 1 w funkcji t , przyjmując za biegun punkt A mechanizmów pokazanych na rys. 1 – 10, str. 93 w zadaniu 2, przy $t = 0$, $\omega_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, w zadaniach 1, 4 – 6. Znaleźć także centroidę nieruchomą i ruchomą. Dane do obliczeń zestawiono w tabeli.

Nr rysunku	Wymiary [cm]		ω [s ⁻¹]	φ [s ⁻²]	Dodatkowe dane
	R	r			
1	-	10	4	-	-
2	20	10	2 t	2	-
3	40	10	6	-	-
4	30	5	10	-	-
5	20	12	9 π	-	-
6	12	16	8 π	-	-
7	-	10	3 t	4	-
8	-	5	$\pi/2$	-	-
9	-	10	-	-	$v_1 = 2v_2 = 80$ [cm/s]
10	-	10	-	-	-

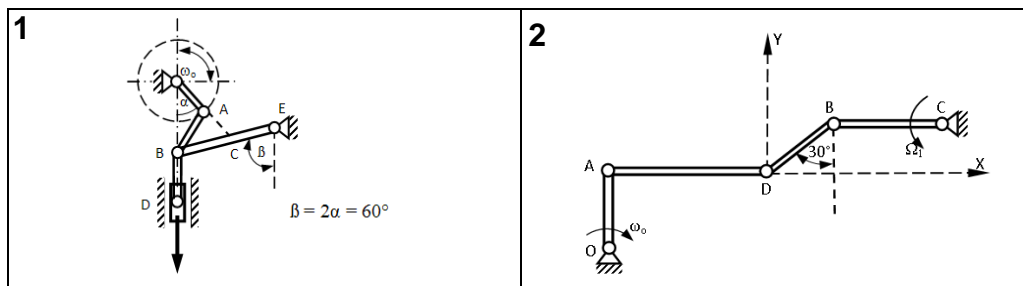


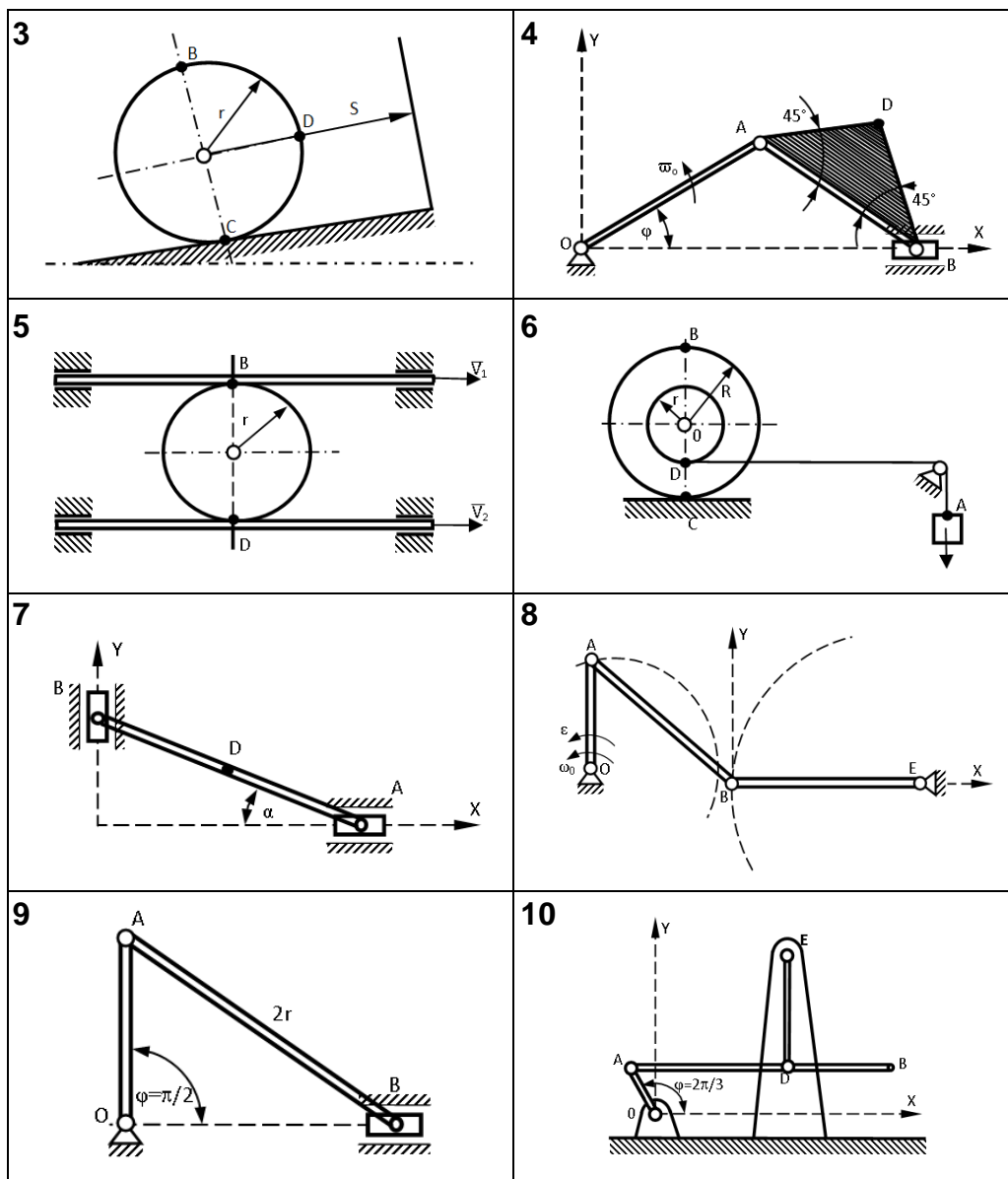
7.2. Prędkości i przyspieszenia w ruchu płaskim

Wyznaczyć dla zadanego położenia mechanizmu prędkości i przyspieszenie punktu B i ewent. D. Schematy mechanizmów pokazano na rys. 1 – 20, str. 95, 96. Dane do obliczeń zestawiono w tabeli.

Uwaga: $\bar{\omega}_0$ $\bar{\varepsilon}_0$ – prędkość kątowa i przyspieszenie kątowe przy zadanym położeniu mechanizmu, $\bar{\omega}_1$ – prędkość kątowa członu 1 (stała), \bar{v}_A i \bar{a}_A – prędkość i przyspieszenie punktu A. Toczenie kół odbywa się bez poślizgu.

Nr rys.	Wymiary [cm]				ω_0 [s ⁻¹]	ε_0 [s ⁻²]	v_A [cm/s]	a_A [cm/s ²]	Dodatkowe dane
	OA	r	AB	AD					
1	10	-	10	-	4	-	-	-	$BE = 10\sqrt{3}$ [cm]
2	53	-	-	-	6	-	-	-	$BE = 5$ [cm], $\omega_1 = 4$ [s ⁻¹]
3	-	10	-	-	-	-	-	-	$s = 4t^2 + 6$ [cm] $t_1 = 1$ [s]
4	16	-	16	-	10	-	-	-	$\varphi = 45^\circ$
5	-	10	-	-	-	-	-	-	$v_1 = 2v_2 = 60$ [cm/s]
6	-	20	-	-	-	-	20	10	$R = 2r = 40$ [cm]
7	-	-	50	-	-	-	10	4	$a_B = 4\sqrt{3}$ [cm/s ²]
8	10	-	20	-	4	$\frac{16}{\sqrt{3}}$	-	-	$BE = 20\sqrt{3}$ [cm]
9	10	-	20	-	-	-	5	10	-
10	10	-	60	40	2	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	10	-	$DE = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ [cm]



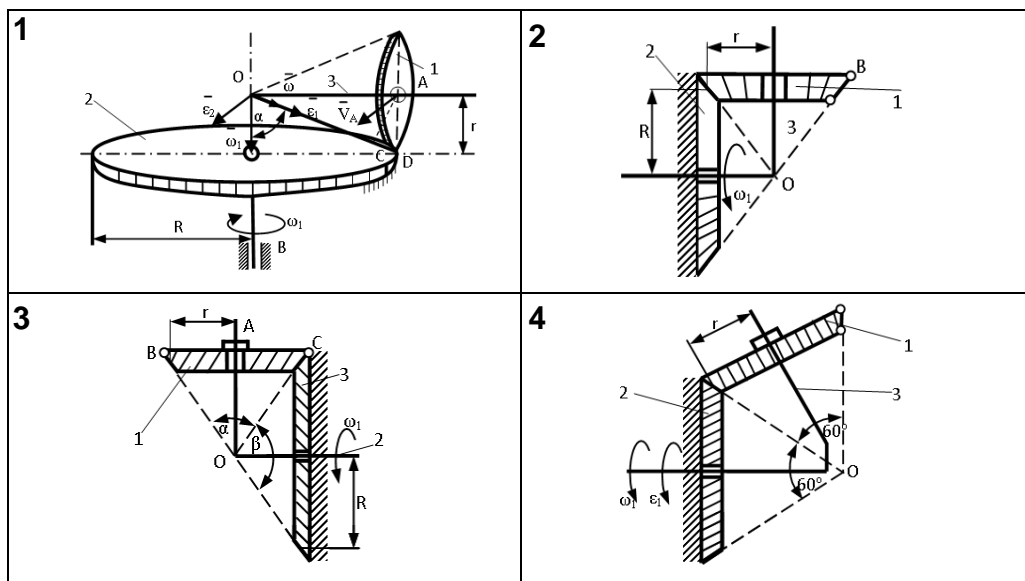


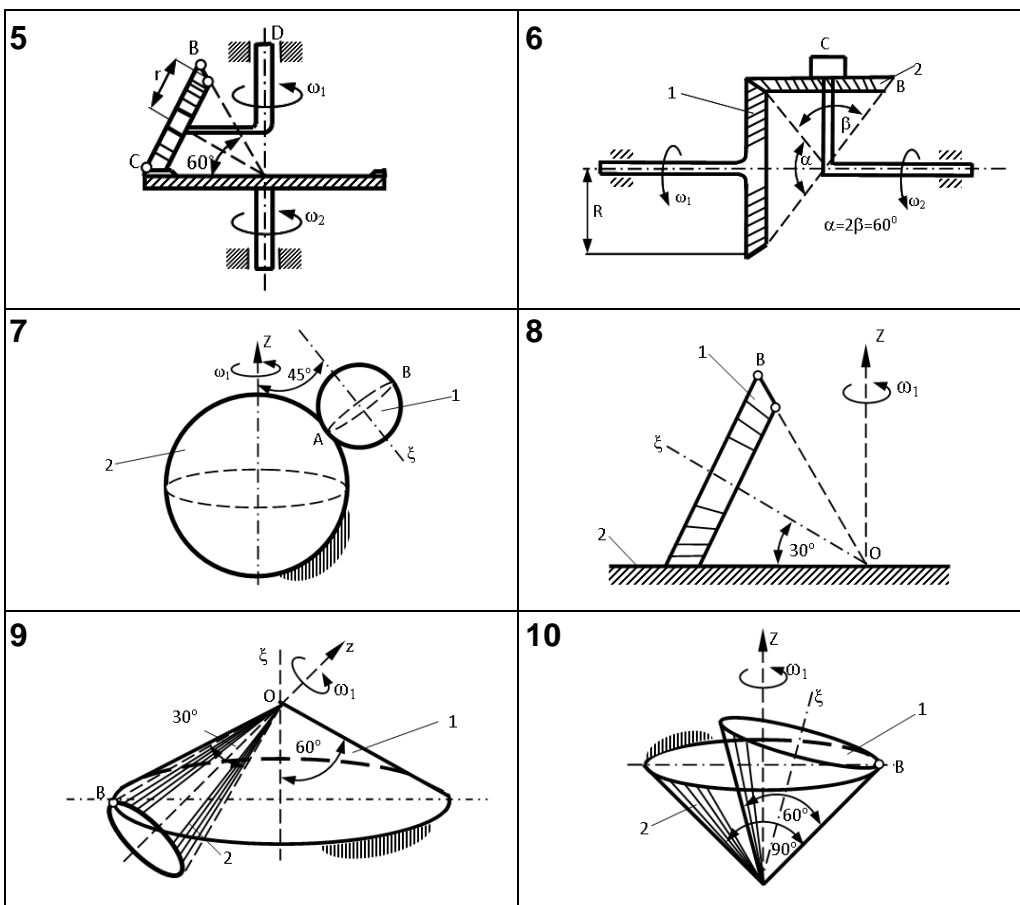
7.3. Prędkości i przyspieszenia w ruchu kulistym

Koło stożkowe 1 zazębia się z nieruchomym kołem stożkowym 2 (rys. 1 – 4, str. 98) o promieniu $R = 2r$ i zostaje wprowadzone w ruch ramką 3 obracającą się wokół nieruchomej osi z prędkością kątową ω_1 . W przykładach 5 – 6 koła 1 i 2 są ruchome. Na rysunkach

7 – 20, str. 98, 99 pokazano ciało 1 toczące się bez poślizgu po powierzchni ciała 2. Wyznaczyć prędkość kątową i przyspieszenie kątowe koła 1 oraz prędkość i przyspieszenie punktu B w chwili $t = 1$ [s]. Dane do obliczeń zestawiono w tabeli.

Nr rysunku	Wymiary cm		ω_1 [s ⁻¹]	Dodatkowe dane
	R	r		
1	15	10	3 t	-
2	20	19	-	$\epsilon_1 = \frac{\pi}{2}$ [s ⁻²]
3	-	4	-	$v_A = 4$ [m/s]
4	-	10	10	$\epsilon_1 = \omega_1^2 = 100$ [s ⁻²]
5	-	10	2	$\omega_2 = \frac{3}{2} \omega_1 = 3$ [s ⁻¹]
6	20	-	4	$\omega_2 = \frac{3}{2} \omega_1 = 6$ [s ⁻²]
7	-	-	2,3	OB = 30 [cm]
8	-	-	3,0	OB = 45 [cm]
9	-	-	1,2	OB = 50 [cm]
10	-	-	2,0	OB = 40 [cm]





7.4. Odpowiedzi

Ad. 7.1. Równania ruchu płaskiego. Centroidy.

Ad 1) $x = 2r \cos \omega t$, $y = 0$, $\varphi = \omega t$

Ad 2) $x = (R + r) \cos \frac{\varepsilon t^2}{2}$, $y = (R + r) \sin \frac{\varepsilon t^2}{2}$, $\varphi = \left(\frac{R}{r} + 1\right) \frac{\varepsilon t^2}{2}$

Ad 3) $x = (R - r) \cos \omega t$, $y = (R - r) \sin \omega t$, $\varphi = -\left(\frac{R}{r} - 1\right) \omega t$

Ad 4) $x = \left(r - \frac{R}{2}\right) \cos \omega t$, $y = \frac{R}{r} \sin \omega t$

Ad 5) $x = 8 \sin 9 \pi t - 12 \sin 6 \pi t$, $y = 8 \cos 9 \pi t + 12 \cos 6 \pi t$

Ad 6) $x = 28 \sin 8 \pi t - 16 \sin 14 \pi t$, $y = 28 \cos 8 \pi t - 16 \cos 14 \pi t$

Ad 7) Nieruchomą centroidą jest okrąg o promieniu $2r$, o środku w punkcie O . Ruchomą centroidą jest okrąg o promieniu r , o środku w punkcie A .

Ad 8) Nieruchomą centroidą jest okrąg o promieniu r , o środku w punkcie O . Ruchomą centroidą jest okrąg o promieniu $2r$, o środku w punkcie A .

$$\text{Ad 9)} \quad y_c = r \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}, \quad \xi_c^2 + \eta_c^2 = r^2 \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \right)^2$$

$$\text{Ad 10)} \quad x_c^2 (x_c^2 - r^2) - r^2 r_c^2 = 0, \quad \eta_c^2 = r \xi_c$$

Ad. 7.2. Prędkości i przyspieszenia w ruchu płaskim

$$\text{Ad 1)} \quad v_B = 40 \sqrt{3} \text{ [cm/s]}, \quad v_D = 60 \text{ [cm/s]}, \quad a_B = 1075 \text{ [cm/s}^2\text{]}, \\ a_D = -680 \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 2)} \quad v_D = 378 \text{ [cm/s]}, \quad a_D = 8465 \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 3)} \quad v_B = 8 \text{ [cm/s]}, \quad v_D = 11,36 \text{ [cm/s]}, \quad a_B = 17,2 \text{ [cm/s}^2\text{]}, \\ a_D = 49,6 \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 4)} \quad v_B = 160 \text{ [cm/s]}, \quad v_D = 80\sqrt{2} \text{ [cm/s]}, \quad a_B = 2219,06 \text{ [cm/s}^2\text{]}, \\ a_D = 2278 \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 5)} \quad v_B = 60 \text{ [cm/s]}, \quad v_D = 30 \text{ [cm/s]}, \quad a_B = a_D = 22,5 \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 6)} \quad v_B = 80 \text{ [cm/s]}, \quad v_D = 20 \text{ [cm/s]}, \quad a_B = 56,2 \text{ [cm/s}^2\text{]}, \\ a_D = 36 \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 7)} \quad v_D = 10 \text{ [cm/s]}, \quad a_D = 7,82 \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 8)} \quad v_B = 40 \sqrt{3} \text{ [cm/s]}, \quad a_B = 1208 \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 9)} \quad v_B = 5 \text{ [cm/s]}, \quad a_B = 8,2 \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 10)} \quad v_B = 18 \text{ [cm/s]}, \quad a_B = 216,3 \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

Ad. 7.3 Prędkości i przyspieszenia w ruchu kulistym

$$\text{Ad 1)} \quad \omega = 5,4 \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad \varepsilon = 14,5 \text{ [s}^{-2}\text{]}, \quad v_B = 90 \text{ [cm/s]}, \\ a_B = 88,8 \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 2)} \quad \omega = \frac{\pi}{2} \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad \varepsilon = 1,1 \pi \text{ [s}^{-2}\text{]}, \quad v_B = \frac{20 \pi}{\sqrt{5}} \text{ [cm/s]}, \\ a_B = 9,4 \pi \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 3)} \quad \omega = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ [s}^{-2}\text{]}, \quad v_B = 8 \text{ [cm/s]}, \\ a_B = 13,6 \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 4)} \quad \omega = 10 \sqrt{3} \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad \varepsilon = 50 \sqrt{15} \text{ [s}^{-2}\text{]}, \quad v_B = 300 \text{ [cm/s]}, \\ a_B = 10^3 \sqrt{30} \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 5)} \quad \omega = 2 \sqrt{3} \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad \varepsilon = 2 \sqrt{3} \text{ [s}^{-2}\text{]}, \quad v_B = 0 \text{ [cm/s]}, \\ a_B = 40 \sqrt{3} \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 6)} \quad \omega = 4 \sqrt{3} \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad \varepsilon = 12 \sqrt{3} \text{ [s}^{-2}\text{]}, \quad v_B = 160 \text{ [cm/s]}, \\ a_B = 160 \sqrt{57} \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 7)} \quad \omega = 6,9 \sqrt{2} \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad \varepsilon = 13 \text{ [s}^{-2}\text{]}, \quad v_B = 11,5 \sqrt{70} \text{ [cm/s]}, \\ a_B = 213,7 \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 8)} \quad \omega = 3 \sqrt{3} \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad \varepsilon = 9 \sqrt{3} \text{ [s}^{-2}\text{]}, \quad v_B = 202,5 \text{ [cm/s]}, \\ a_B = 202,5 \sqrt{21} \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 9)} \quad \omega = 1,2 \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad \varepsilon = 0,372 \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ [s}^{-2}\text{]}, \quad v_B = 0 \text{ [cm/s]}, \\ a_B = 18,6 \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 10)} \quad \omega = 1,035 \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad \varepsilon = 4 \text{ [s}^{-2}\text{]}, \quad v_B = 0 \text{ [cm/s]}, \\ a_B = 14,41 \sqrt{2} \text{ [cm/s}^2\text{]}$$