

II. KINEMATYKA

5. KINEMATYKA PUNKTU

- a. Podczas opisu ruchu punktu wektorem – promieniem wodzącym położenie punktu, prędkość i przyspieszenie w dowolnej chwili t wyznacza się ze wzorów

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (5.1)$$

gdzie: \vec{r} - wektor, promień wodzący, \vec{v} - prędkość, \vec{a} - przyspieszenie

- b. Podczas opisu ruchu punktu równaniami skończonymi posługujemy się współzależnymi

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (5.2)$$

Trajektorię punktu otrzymuje się rugując z równań (5.2) parametr t (czas), zaś prędkość i przyspieszenie korzystając z ich rzutów na nieruchome osie

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad (5.3)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z} \quad (5.4)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (5.5)$$

$$\vec{v} = \bar{i}v_x + \bar{j}v_y + \bar{k}v_z, \quad \vec{a} = \bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z \quad (5.6)$$

$$\cos(\vec{v}, \bar{i}) = \frac{v_x}{|\vec{v}|}, \quad \cos(\vec{v}, \bar{j}) = \frac{v_y}{|\vec{v}|}, \quad \cos(\vec{v}, \bar{k}) = \frac{v_z}{|\vec{v}|} \quad (5.7)$$

$$\cos(\vec{a}, \bar{i}) = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos(\vec{a}, \bar{j}) = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos(\vec{a}, \bar{k}) = \frac{a_z}{|\vec{a}|} \quad (5.8)$$

gdzie: $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – wektory jednostkowe osi x, y i z

c. Podczas opisu ruchu punktu współrzędną naturalną trzeba znać

$$s = s(t) \quad (5.9)$$

gdzie: s – współrzędna naturalna (łukowa) odmierzona od danego początku odczytu na trajektorii

Kierunek ruchu oraz trajektorię punktu, prędkość i przyspieszenie wyznacza się ze wzorów

$$\bar{v} = \bar{\tau} \frac{ds}{dt}, \quad \bar{a} = \bar{n} a_n + \bar{\tau} a_\tau \quad (5.10)$$

gdzie: $\bar{n}, \bar{\tau}$ - wektory jednostkowe głównej normalnej i stycznej, przy czym wartość prędkości oraz przyspieszenia całkowitego \bar{a} , normalnego \bar{a}_n i stycznego \bar{a}_τ obliczamy ze wzorów

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} \quad (5.11)$$

Jeżeli punkt porusza się ruchem jednostajnym, to

$$v = \text{const}, \quad a_\tau = 0, \quad s = s_0 + vt \quad (5.12)$$

Przy ruchu jednostajnym zmiennym

$$v = v_0 + a_\tau t, \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_\tau t^2, \quad a_\tau = \text{const} \quad (5.13)$$

gdzie: s_0, v_0 – wartość s i v przy $t = 0$

Jeżeli jest dana zależność $v = v(t)$, to współrzędną naturalną wyznacza się ze wzoru

$$s = \int_0^t v(t) dt + s_0 \quad (5.14)$$

Ponieważ poruszający się punkt może zmieniać kierunek ruchu po trajektorii to drogę s^* przebytą przez punkt w przedziale czasu $(0, t)$ wyznaczy się jako sumę długości łuków oddzielnych części na których prędkość v zachowuje swój znak. Tak więc

$$s^* = |s_1 - s_0| + |s_2 - s_1| + \dots + |s - s_n| \quad (5.15)$$

lub przy pomocy całki

$$s^* = \int_0^t \frac{ds}{dt} dt$$

gdzie: s_1, s_2, \dots, s_n – wartość współrzędnej naturalnej w chwilach t_1, t_2, \dots, t_n , w których prędkość zmienia swój znak

Promień krzywizny trajektorii poruszającego się punktu wyznacza się ze wzoru

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} \quad (5.16)$$

Jeżeli dane są równania skończone ruchu $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, to tok postępowania przy wyznaczaniu ρ jest następujący:

$$\begin{aligned} \text{a) } v_x &= \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ \text{b) } a_\tau &= \frac{dv}{dt} \\ \text{c) } a_x &= \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ \text{d) } a_n &= \sqrt{a^2 - a_\tau^2} \\ \text{e) } \rho &= \frac{v^2}{a_n} \end{aligned} \quad (5.17)$$

d. Współrzędne walcowe punktu r , φ i z (rys.11, str. 56) są związane ze współrzędnymi prostokątnymi następująco:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z(t) \quad (5.18)$$

Równania ruchu punktu we współrzędnych walcowych mają postać

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t) \quad (5.19)$$

Jeżeli $z = 0$, to współrzędne walcowe przechodzą we współrzędne biegunowe na płaszczyźnie $0xy$. Równania ruchu, prędkość i przyspieszenie w tych współrzędnych wyznaczy się ze wzorów

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r \dot{\varphi}, \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} \quad (5.20)$$

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = 2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}, \quad a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2}$$

Jeżeli ruch podany jest we współrzędnych walcowych, to dodatkowo dochodzi rzut na oś (z), a mianowicie:

$$v_z = \dot{z}, \quad a_z = \ddot{z}$$

skąd

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2}, \quad a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2 + a_z^2} \quad (5.21)$$

e. Współrzędne sferyczne r, φ, θ (rys. 12, str. 56) związane są ze współrzędnymi prostokątnymi następująco:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (5.22)$$

Równania ruchu punktu we współrzędnych sferycznych mają postać

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t) \quad (5.23)$$

Rzuty prędkości oraz przyspieszenia, a także całkowite prędkości i przyspieszenia wyznaczy się ze wzorów

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \dot{r}, & v_\varphi &= r \sin \theta \cdot \dot{\varphi}, & v_\theta &= r \dot{\theta} \\ v &= \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_\theta^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

$$\left. \begin{aligned} a_R &= \ddot{r} - R \dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi &= r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2 \\ a_\theta &= r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta = 2 r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2 + a_\theta^2}$$

Przykład 11

Mając dane równanie skończone ruchu w postaci

$$x = \frac{c}{2} (e^{kt} + e^{-kt})$$

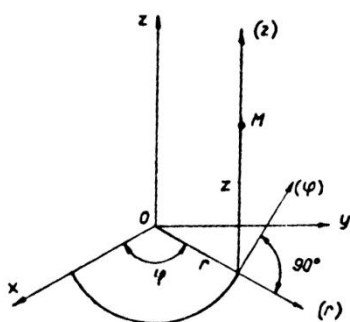
$$y = \frac{b}{2} (e^{kt} - e^{-kt})$$

Znaleźć trajektorię, prędkość, przyspieszenie styczne, całkowite, normalne i promień krzywizny tego toru (c, b – stałe, x, y – w metrach, t – w sekundach)

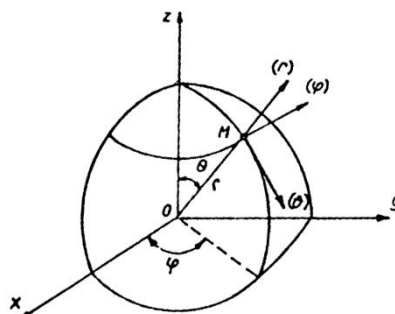
Rozwiązanie

Rugując z równań skończonych ruch punktu czas t otrzymamy trajektorię punktu w postaci jawnej

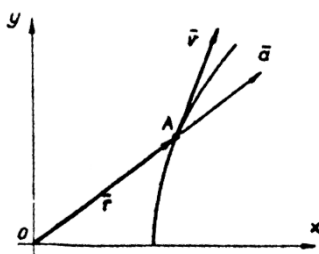
$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{c}{2} (e^{kt} + e^{-kt}) \\ y &= \frac{b}{2} (e^{kt} - e^{-kt}) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} | : \frac{c}{2} \\ | : \frac{b}{2} \end{aligned}$$



Rys. 11



Rys. 12



Rys. 13

$$\left. \begin{aligned} \frac{2x}{c} &= e^{kt} + e^{-kt} \\ \frac{2y}{b} &= e^{kt} - e^{-kt} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(\quad)^2 \\ &- \\ &(\quad)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A więc szukana trajektoria jest hiperbolą o półosiach c i b . Podstawiając w chwili początkowej $t_0 = 0$ znajdujemy: $x_0 = 6$, $y_0 = 0$ tzn. w chwili początkowej punkt znajduje się w wierzchołku hiperboli $A_0 (C,0)$. Jeżeli czas t rośnie, wzrastają także współrzędne x i y i są dodatnie. Dlatego punkt A porusza się po prawej gałęzi hiperboli w kierunku zaznaczonym na rys. 13, str. 57. Ze wzorów (6.17) znajdujemy

$$v_x = \frac{ck}{2} (e^{kt} - e^{-kt}) = \frac{c}{b} ky$$

$$v_y = \frac{bk}{2} (e^{kt} - e^{-kt}) = \frac{b}{c} ky$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{k}{cb} \sqrt{c^4 x^2 + b^4 y^2}$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{i}) = \frac{v_x}{|\vec{v}|} = \frac{c^2 y}{\sqrt{c^4 x^2 + b^4 y^2}}$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{j}) = \frac{v_y}{|\vec{v}|} = \frac{b^2 y}{\sqrt{c^4 x^2 + b^4 y^2}}$$

$$a_x = \frac{ck^2}{2} (e^{kt} + e^{-kt}) = k^2 x$$

$$a_y = \frac{bk^2}{2} (e^{kt} + e^{-kt}) = k^2 x$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = k^2 \sqrt{x^2 + y^2}$$

Wiadomo, że

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \text{więc} \quad a = k^2 r.$$

$$\text{Prócz tego} \quad a = k^2 \cdot x \bar{i} + k^2 \cdot y \cdot \bar{j} = k^2 (x \bar{i} + y \bar{j}),$$

$$\text{ponieważ} \quad x \bar{i} + y \bar{j} = \bar{r}, \text{ to } \bar{a} = k^2 \bar{r},$$

tzn. wektor przyspieszenia skierowany był wzdłuż wektora promienia wodzącego punktu

$$a_r = \frac{dv}{dt} = \frac{k^2 xy (a^2 + b^2)}{\sqrt{a^4 x^2 + b^4 y^2}}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{k^2 (a^2 x^2 - b^2 y^2)}{\sqrt{a^4 x^2 + b^4 y^2}}$$

$$\rho^2 = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(a^4 x^2 + b^4 y^2) \sqrt{a^4 x^2 + b^4 y^2}}{a^2 x^2 - b^2 y^2}$$

Przykład 12

Ruch punktu po trajektorii opisany jest równaniem

$$s = \pi t + 12 \cos \frac{\pi t}{6}$$

gdzie: s – w metrach, t – w sekundach

Wyznaczyć wartość współrzędnej naturalnej s w chwili $t = 15$ s oraz drogę s^* przebytą po tym czasie.

Rozwiązanie

$$v = \frac{ds}{dt} = \pi - 2\pi \sin \frac{\pi t}{6}$$

Znajdziemy czas t_1, t_2, \dots, t_n , w którym prędkość punktu zmienia swój znak:

$$0 = \pi - 2\pi \sin \frac{\pi t}{6}$$

skąd

$$t_{n+1} = (-1)^n + 6n \quad (n = 0, 1, 2 \dots)$$

a zatem w czasie pierwszych 15 s prędkość zmienia swój znak w chwili: $t_1 = 1$ s, $t_2 = 15$ s, $t_3 = 13$ s

Współrzędna naturalna s dla tych chwil, a także dla $t_0 = 0$ i $t_4 = 15$ s jest równa

$$s_1(t_1) = (\pi + 6\sqrt{3}) \text{ [m]}$$

$$s_2(t_2) = (5\pi - 6\sqrt{3}) \text{ [m]}$$

$$s_3(3) = (13\pi + 6\sqrt{3}) \text{ [m]}$$

$$s_4(t_4) = 15\pi \text{ [m]}$$

Korzystając ze wzoru (5.15) znajdziemy drogę s^* przebytą przez punkt po upływie 15 s.

$$s^* = |\pi + 6\sqrt{3} - 12| + |5\pi - 6\sqrt{3} - \pi - 6\sqrt{3}| + |13\pi + 6\sqrt{3} - 5\pi + 6\sqrt{3}| + |15\pi - 13\pi - 6\sqrt{3}| = 59,6 \text{ [m]}$$

5.1. Ruch punktu opisany wektorem promieniem wodzącym

Dany jest ruch punktu opisany wektorem promieniem wodzącym, wyznaczyć trajektorię tego punktu. Znaleźć także prędkość i przyspieszenie dla dowolnej chwili t , oraz promień krzywizny dla $t = 0$.

$$1. \quad \vec{r} = (1 + 2t)\vec{i} + (2 - 3t)\vec{j}$$

$$2. \quad \vec{r} = (2 + 3t)\vec{i} + (1 - 2t)\vec{j} + (2 + t)\vec{k}$$

$$3. \quad \vec{r} = t^2\vec{i} + (5 - 2t^2)\vec{k}$$

$$4. \quad \vec{r} = (3\cos\frac{\pi t}{6})\vec{i} + (1 + 3\sin\frac{\pi t}{6})\vec{j}$$

$$5. \quad \vec{r} = (2 + \sin\frac{\pi t}{3})\vec{i} + (1 + 2\cos\frac{\pi t}{3})\vec{k}$$

$$6. \quad \vec{r} = (6\cos 2t)\vec{i} + t\vec{k}$$

$$7. \quad \vec{r} = (3 + 2\cos 2t)\vec{i} + (2 - 3\sin 2t)\vec{j}$$

$$8. \quad \vec{r} = (3\sin t^3)\vec{j} + 2\cos t^3\vec{k}$$

$$9. \quad \vec{r} = t\vec{i} + (2t - t^2)\vec{j}$$

$$10. \quad \vec{r} = (\cos 2t)\vec{i} + (\sin t)\vec{k}$$

5.2. Ruch punktu opisany równaniami skończonymi

Mając dane równanie skończone ruchu punktu znaleźć prędkość, przyspieszenie dla dowolnej chwili t . Wyznaczyć także równanie ruchu po trajektorii. Współrzędną naturalną (drogową) s odmierzać od początkowego położenia punktu w kierunku ruchu

$$1. \quad x = 3t^2 + 5; \quad y = 4t^2 + 3$$

$$2. \quad x = 1 - t; \quad y = t - 1$$

$$3. \quad x = 2 \sin 2t; \quad y = 2 \cos 2t$$

$$4. \quad x = 4 + r \cos \omega t; \quad y = r \sin \omega t$$

$$5. \quad x = 3 \cos t^2; \quad y = 3 \sin t^2$$

$$6. \quad x = e^t \cos t; \quad y = e^t \sin t$$

$$7. \quad x = 4r \cos^2 \omega t; \quad y = 3r \sin^2 \omega t$$

$$8. \quad x = r \cos^3 t; \quad y = r \sin^3 t$$

$$9. \quad x = r(t - \sin t); \quad y = r(1 - \cos t)$$

$$10. \quad x = b \cos t, \quad y = b \sin t, \quad z = ct$$

Uwaga: b, c, r, ω – pewne stałe

5.3. Ruch punktu we współrzędnych naturalnych

Wyznaczyć równanie ruchu punktu po trajektorii oraz wartość współrzędnej naturalnej s i przebytą drogę s^* po czasie $t = 5$ sek., jeżeli prędkość punktu dana jest równaniem

$$1. \quad v = 10 \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right]$$

$$2. \quad v = 2 \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right] (0 \leq t \leq 3)$$

$$v = (5 - t) \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right] (3 < t \leq 5)$$

$$3. \quad v = (2t + 1) \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right]$$

4. $v = (3 - t) \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right]$
5. $v = \pi/5 \sin\left(\frac{2\pi t}{15}\right) \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right]$
6. $v = (3 + \pi/5 \cos((2\pi t)/5)) \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right]$
7. $v = (\pi + 2\pi \cos(\frac{2\pi t}{5})) \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right]$
8. $v = (t^2 - 3t + 2) \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right]$
9. $v = (\pi - 2\pi \sin(\frac{\pi t}{6})) \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right]$
10. $v = 4 \sin(\frac{3\pi t}{2}) \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right]$

5.4 Ruch punktu opisany współrzędnymi krzywoliniowymi

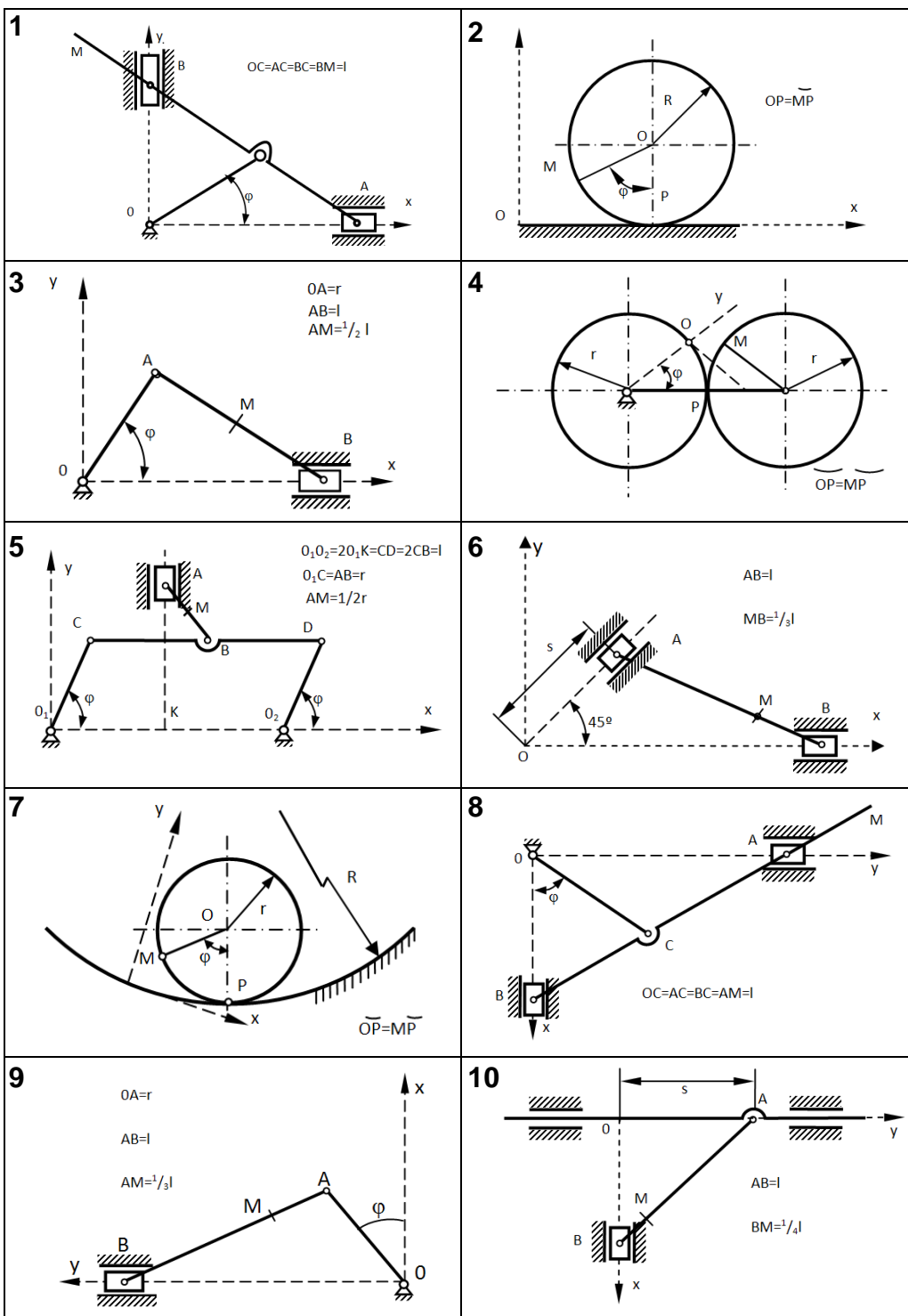
Mając dane równania ruchu punktu we współrzędnych biegunowych od 1 ÷ 5, walcowych; 6 ÷ 7 sferycznych; 8 ÷ 10 wyznaczyć trajektorię punktu, prędkość i przyspieszenie dla $t = 0$. W zadaniach 9 ÷ 10 mając równania skończone ruchu wyznaczyć rzuty prędkości i przyspieszenia na osie współrzędnych biegunowych, przyjmując za biegun początek współrzędnych prostokątnych, a za oś biegunową – oś odciętych:

1. $\varphi = kt; \quad r = b + 2a \cos kt$
2. $\varphi = kt; \quad r = 4R \sin^2 \frac{kt}{2}$
3. $\varphi = \arctg t; \quad r = b(1 + t^2)$
4. $\varphi = kt; \quad r = b + \frac{c}{\cos kt}$
5. $\varphi = kt; \quad r = r_0 e^{kt}$
6. $\varphi = \frac{1}{2} t^2; \quad r = 2; \quad z = \frac{1}{3} t^3$
7. $\varphi = 2t; \quad r = 4; \quad z = t$
8. $\varphi = 2t; \quad r = e^t; \quad \theta = t$
9. $\varphi = t; \quad r = t; \quad \theta = t$
10. $\varphi = t^2; \quad r = t; \quad \theta = \frac{1}{2} t^2$

5.5. Wyznaczanie parametrów ruchu punktu

Dla punktu M zadanego mechanizmu znaleźć prędkość punktu, przyspieszenie całkowite, a także promień krzywizny trajektorii w odpowiednim punkcie. Schematy mechanizmów pokazano na rys. 1 – 10, str. 63. Dane do obliczeń zestawiono w tabeli.

Nr rysunku	Wymiary członów mechanizmu			φ	$S = s(t)$	t_1
	l	R	r	[rad]	[cm]	[s]
1	15	-	-	$2\pi t$	-	1/6
2	-	50	-	$2\pi t$	-	1/9
3	54	-	30	πt	-	$\frac{1}{2}$
4	-	-	30	$6\pi t$	-	1/12
5	40	-	15	πt	-	1/6
6	60	-	-	-	$60\sqrt{2}\sin 2\pi t$	1/12
7	-	250	50	$5\pi t$	-	1/15
8	10	-	-	$3\pi t$	-	1/12
9	60	-	35	πt	-	1/6
10	30	-	-	-	$40\sin 2\pi t$	1/4



5.6. Odpowiedzi

Ad 5.1. Ruch punktu opisany wektorem promieniem wodzącym

Ad 1) $3x + 2y = 7 \quad z = 0 \quad (1 \leq x < \infty)$

$v = 13 \text{ [cm/s]} \quad a = 0$

Ad 2) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1} \quad (2 \leq x < \infty)$

$v = 14 \text{ [cm/s]} \quad a = 0$

Ad 3) $2x + z = 5 \quad y = 0 \quad (0 \leq x < \infty)$

$v = 2t\sqrt{5} \quad a = 2\sqrt{5} \text{ [cm/s}^2\text{]}$

Ad 4) $x^2 + (y-1)^2 = 9 \quad z = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \text{ [cm/s]} \quad a = \frac{\pi^2}{12} \text{ [cm/s}^2\text{]} \quad \rho = 3 \text{ [cm]}$

Ad 5) $(x-2)^2 + \frac{(z-1)^2}{4} = 1 \quad y = 0$

$v = \frac{\pi}{3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \frac{\pi t}{3}} \quad a = \frac{\pi^2}{9} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \frac{\pi t}{3}} \quad \rho = \frac{1}{2} \text{ [cm]}$

Ad 6) $y = 6 \cos 2z \quad x = 0 \quad (1 \leq z < \infty)$

$v = \sqrt{1 + 144 \sin^2 2t} \quad a = 24 \cos 2t \quad \rho_0 = \frac{1}{24} \text{ [cm]}$

Ad 7) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \quad z = 0$

$v = 2\sqrt{4 + 5 \cos^2 2t} \quad a = 4\sqrt{4 + 5 \sin^2 2t} \quad \rho_0 = \frac{9}{2} \text{ [cm]}$

Ad 8) $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{5} = 1 \quad x = 0 \quad \rho_0 = 0$

$v = 3t^2 \sqrt{1 + 5 \cos^2 t^3}$

$a = 3t \sqrt{9(2 \cos t^3 - 3t^3 \sin t^3) + 4(2 \sin t^3 + 3t^3 \cos t^3)^2}$

Ad 9) $y = 2x - x^2 \quad x = 0 \quad (0 \leq x < \infty)$

$v = \sqrt{5 - 8t + 4t^2} \quad a = 2 \text{ [cm/s}^2\text{]} \quad \rho_0 = \frac{5\sqrt{5}}{2} \text{ [cm]}$

Ad 10) $x = 1 - 2z^2 \quad y = 0 \quad (-1 \leq z \leq 1)$

$v = \sqrt{4 \sin^2 2t + \cos^2 t} \quad a = \sqrt{16 \cos^2 2t + \sin^2 t} \quad \rho_0 = \frac{1}{24} \text{ [cm]}$

Ad 5.2. Ruch punktu opisany równaniami skończonymi

- Ad 1) $v = 10 t$, $a = 10 \text{ [cm/s}^2\text{]}$, $s = 5 t^2$
 Ad 2) $v = \sqrt{2} \text{ [cm/s]}$, $a = 0$, $s = 2 t$
 Ad 3) $v = 4 \text{ [cm/s]}$, $a = 8 \text{ [cm/s}^2\text{]}$, $s = 4 t$
 Ad 4) $v = r \omega$, $a = r \omega^2$, $s = r \omega t$
- Ad 5) $v = 6 t$, $a = 6 \text{ [cm/s}^2\text{]}$, $s = 5 t^2$
 Ad 6) $v = \sqrt{2} e^t$, $a = \sqrt{6} e^t$, $s = \sqrt{2} (e^t - 1)$
- Ad 7) $v = 5 r \omega \sin 2 \omega t$, $a = 10 r \omega^2 \cos 2 \omega t$, $s = 5 r \sin^2 \omega t$
 Ad 8) $v = \frac{3}{2} r \sin 2 t$, $a = 3 r \sqrt{\cos^6 t + \sin^6 t}$,
 $s = \frac{3}{2} r \sin^2 t$, $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$
 Ad 9) $v = r \text{ [cm/s]}$, $a = r \text{ [cm/s}^2\text{]}$, $s = 4 r (1 - \cos \frac{t}{2})$,
 $(0 \leq t \leq 2 \pi)$
 Ad 10) $v = \sqrt{b^2 + c^2} \text{ [cm/s]}$, $a = b = \text{[cm/s}^2\text{]}$, $s = \sqrt{b^2 + c^2} \cdot t$

Ad 5.3. Ruch punktu we współrzędnych naturalnych

- Ad 1) $s = 10 t$, $s_5 = 50 \text{ [cm]}$, $s^*_5 = 50 \text{ [cm]}$
 Ad 2) $s = 2 t$, $(0 \leq t \leq 3)$, $s_5 = 8 \text{ [cm]}$,
 $s = (5 t - \frac{t^2}{2} - 4,5)$, $s^*_5 = 8 \text{ [cm]}$
 Ad 3) $s = t^2 + t$, $s_5 = 30 \text{ [cm]}$, $s^*_5 = 30 \text{ [cm]}$
 Ad 4) $s = 3 t - \frac{t^2}{2}$, $s_5 = 2,5 \text{ [cm]}$, $s^*_5 = 6,5 \text{ [cm]}$
 Ad 5) $s = \frac{3}{8} (1 - \cos \frac{8 \pi t}{15})$, $s_5 = \frac{9}{16} \text{ [cm]}$, $s^*_5 = \frac{33}{16} \text{ [cm]}$
 Ad 6) $s = 3 t + \frac{1}{2} \sin \frac{2 \pi t}{5}$, $s_5 = 15 \text{ [cm]}$, $s^*_5 = 15 \text{ [cm]}$
 Ad 7) $s = \pi t = 5 \sin \frac{2 \pi t}{5}$, $s_5 = 5 \pi \text{ [cm]}$, $s^*_5 = (\frac{5 \pi}{3} + 10 \sqrt{3}) \text{ [cm]}$
 Ad 8) $s = \frac{t^3}{3} - \frac{3 t^2}{2} + 2 t$, $s_5 = \frac{85}{16} \text{ [cm]}$, $s^*_5 = \frac{29}{2} \text{ cm}$
 Ad 9) $s = \pi t + 12 \cos \frac{\pi t}{6}$, $s_5 = (5 \pi - 6 \sqrt{3}) \text{ [cm]}$,
 $s^*_5 = (\pi + 6 \sqrt{3} - 12) \text{ [cm]}$
 Ad 10) $s = -\frac{8}{3 \pi} \cos \frac{3 \pi t}{2}$, $s_5 = \frac{8}{3 \pi} \text{ [cm]}$, $s^*_5 = \frac{82}{3 \pi} \text{ [cm]}$

Ad 5.4 Ruch punktu opisany współrzędnymi naturalnymi

$$\text{Ad 1) } r = b + 2 c \cos \varphi, \quad v = k \sqrt{4 r^2 + b^2 + 4 r b} \text{ [cm/s]}, \\ a = k^2 \sqrt{16 r^2 + b^2 + 8 r b} \text{ [cm/s]}$$

$$\text{Ad 2) } r = 4 b \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$\text{Ad 3) } r = b (1 + \tan^2 \varphi) = \frac{b}{\cos^2 \varphi}, \quad v = b \text{ [cm/s]}, \quad a = b \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 4) } r = b + \frac{c}{\cos \varphi}, \quad v = k \sqrt{c^2 + 2 b c + b^2} \text{ [cm/s}^2\text{]}, \quad a = k^2 b \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 5) } r = b a^\varphi, \quad v = k r \sqrt{2} \text{ [cm/s]}, \quad a = 2 k^2 r \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 6) } v = 0, \quad a = 2 \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 7) } v = \sqrt{65} \text{ [cm/s]}, \quad a = 16 \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 8) } v = \sqrt{2} \text{ [cm/s]}, \quad a = 2 \sqrt{5} \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 9) } v = 1 \text{ [cm/s]}, \quad a = 2 \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

$$\text{Ad 10) } v = 1 \text{ [cm/s]}, \quad a = 3 \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

Ad 5.5. Wyznaczenie parametrów ruchu punktu

$$\text{Ad 1) } v = 30 \pi \sqrt{3} \text{ [cm/s]}, \quad a = 30 \pi \sqrt{3} \text{ [cm/s}^2\text{]}, \quad \rho = 15 \sqrt{2} \text{ [cm/s]}$$

$$\text{Ad 2) } v = 6,8 \pi \text{ [cm/s]}, \quad a = 200 \pi^2 \text{ [cm/s}^2\text{]}, \quad \rho = 0,23 \text{ [cm/s]}$$

$$\text{Ad 3) } v = 30 \pi \text{ [cm/s]}, \quad a = \frac{5}{3} \sqrt{106} \pi^2 \text{ [cm/s}^2\text{]}, \quad \rho = 60 \text{ [cm]}$$

$$\text{Ad 4) } v = 180 \pi \text{ [cm/s]}, \quad a = 1080 \pi^2 \text{ [cm/s}^2\text{]}, \quad \rho = 60 \text{ [cm]}$$

$$\text{Ad 5) } v = \frac{\pi \sqrt{7}}{2} r \text{ [cm/s]}, \quad a = \frac{\sqrt{3} \pi^2}{2} r \text{ [cm/s}^2\text{]}, \quad \rho = \frac{7}{2 \sqrt{3}} r \text{ [cm]}$$

$$\text{Ad 6) } v = 74,8 \pi \text{ [cm/s]}, \quad a = 227,6 \pi^2 \text{ [cm/s}^2\text{]}, \quad \rho = 26,9 \text{ [cm]}$$

$$\text{Ad 7) } v = 200 \pi \text{ [cm/s]}, \quad a = 916,5 \pi^2 \text{ [cm/s}^2\text{]}, \quad \rho = 133,3 \text{ [cm]}$$

$$\text{Ad 8) } v = 30 \sqrt{5} \pi \text{ [cm/s]}, \quad a = 90 \sqrt{5} \pi^2 \text{ [cm/s}^2\text{]}, \quad \rho = \frac{5}{3} \sqrt{5} \text{ [cm]}$$

$$\text{Ad 9) } v = 32,5 \pi \text{ [cm/s]}, \quad a = 30,6 \pi^2 \text{ [cm/s}^2\text{]}, \quad \rho = 34,7 \text{ [cm]}$$

$$\text{Ad 10) } v = 15 \sqrt{2} \pi \text{ [cm/s]}, \quad a = 5 \sqrt{2} \pi^2 \text{ [cm/s}^2\text{]}, \quad \rho = 270 \text{ [cm]}$$