

10. ZASADY DYNAMIKI UKŁADU PUNKTÓW MATERIALNYCH

10.1 Środek masy i zasada ruchu środka masy

a. Środek masy układu punktów materialnych jest to punkt geometryczny o współrzędnych

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M}, \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M} \quad (10.1)$$

gdzie:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i - \text{całkowita masa układu}$$

Zasada ruchu środka masy ma postać

$$\left. \begin{aligned} M \bar{a}_s &= \bar{W}_g \\ M \ddot{x}_s &= W_{gx}, \quad M \ddot{y}_s = W_{gy}, \quad M \ddot{z}_s = W_{gz} \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

gdzie: \bar{W}_g – wektor główny (suma geometryczna sił czynnych i reakcji).

Tak więc: „Środek masy porusza się jak swobodny punkt materialny pod działaniem sumy geometrycznej sił czynnych i reakcji”.

Jeżeli $\bar{W}_g = 0$, to $\bar{v}_s = \text{const}$, jeżeli $W_{gx} = 0$, to $v_{sx} = \dot{x}_s = \text{const}$, itd.

10.2 Zasada pędu i zasada pędu i popędu

Pędem punktu materialnego nazywamy wektor $m\bar{v}$, a pędem układu punktów materialnych wektor

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = M \bar{v}_s \quad (10.3)$$

b. Zasada pędu dla układu punktów materialnych ma postać

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{W}_g \quad (10.4)$$

„Pochodna pędu względem czasu jest równa sumie geometrycznej sił czynnych i reakcji”

Zasada pędu i popędu dla układu punktów materialnych ma postać

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_2 - \bar{p}_1 &= \int_0^t \bar{W}_g dt \\ p_{2x} - p_{1x} &= \int_0^t W_{gx} dt, \\ p_{2y} - p_{1y} &= \int_0^t W_{gy} dt \\ p_{2z} - p_{1z} &= \int_0^t W_{gz} dt \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

„Przyrost geometryczny popędu układu w pewnym odstępie czasu jest równy popędowi (impulsowi) sił działających na układ w tym odstępie czasu”.

Dla punktu materialnego

$$\left. \begin{aligned} m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 &= \int_0^t \bar{W} dt \\ m(v_{2x} - v_{1x}) &= \int_0^t W_x dt \\ m(v_{2y} - v_{1y}) &= \int_0^t W_y dt \\ m(v_{2z} - v_{1z}) &= \int_0^t W_z dt \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

gdzie:

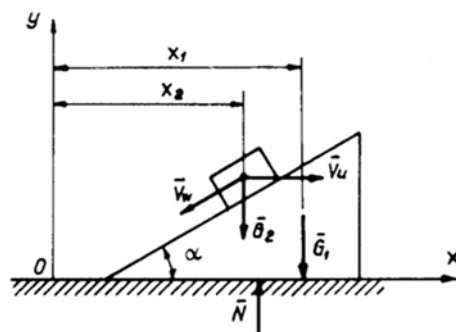
\bar{v}_1 – prędkość początkowa punktu,

\bar{v}_2 – prędkość punktu w chwili t ,
 \bar{W} – wypadkowa sił działających na punkt.

Przykład

Po równi pochyłej o kącie α i ciężarze \bar{G}_1 spoczywającej na idealnie gładkiej podstawie zsuwa się ciało o ciężarze \bar{G}_2 . Mając daną prędkość względną $v_w = bt^2$ zsuwającego się ciała, kąt pochylenia równi oraz pomijając opory ruchu równi i zsuwającego się ciała wyznaczyć prędkość, z jaką będzie się przesuwawała równia (rys. 29).

Rozwiązanie



Rys.29

Pierwszy sposób. Zewnętrznyymi siłami działającymi na układ są ciężary ciał \bar{G}_1 , \bar{G}_2 i reakcja normalna \bar{N} . Ponieważ siły są pionowe, to $\Sigma P_{ix} = 0$. Dlatego przyjmując, że w chwili początkowej układ jest nieruchomy, korzystając z zasady zachowania pędu otrzymamy

$$\frac{G_1}{g} v_{1x} + \frac{G_2}{g} v_{2x} = 0$$

gdzie: v_{1x} i v_{2x} – rzuty prędkości na oś $0x$. Wartość prędkości względnej ciała zsuwającego się jest równa

$$v_w = bt^2$$

Wektor unoszenia \bar{v}_u równy prędkości \bar{v}_1 równi jest równoległy do osi $0x$, dlatego

$$v_{wx} = v_{1x} = v_1$$

$$v_{2x} = v_{wx} + v_{ux} = v_1 - b t^2 \cos \alpha$$

Podstawiając te związki do naszego pierwszego równania otrzymamy

$$\frac{G_1}{g} v_1 + \frac{G_2}{g} (v_1 - b t^2 \cos \alpha) = 0$$

skąd

$$v_1 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} b t^2 \cos \alpha$$

Drugi sposób. Współrzędna środka masy jest równa

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{G_1 x_1 + G_2 x_2}{G_1 + G_2}$$

gdzie:

x_1, x_2 – współrzędne środków ciężkości zsuwającego się ciała i równi. Stosując metodę zasady zachowania ruchu środka masy otrzymujemy

$$G_1 x_1 + G_2 x_2 = \text{const}$$

Różniczkując powyższe równanie względem czasu mamy:

$$G_1 \frac{d x_1}{d t} + G_2 \frac{d x_2}{d t} = 0$$

ale

$$\frac{d x_1}{d t} = v_{1x} = v_1, \quad \frac{d x_2}{d t} = v_{2x} = v_1 - b t^2 \cos \alpha$$

więc

$$G_1 v_1 + G_2 (v_1 - b t^2 \cos \alpha) = 0$$

ostatecznie

$$v_1 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} b t^2 \cos \alpha$$

10.3 Kręt, zasada krętu

- c. Kręt układu mechanicznego względem nieruchomego bieguna i względem nieruchomej osi zapisujemy w postaci

$$\bar{K}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i \quad (10.7)$$

$$K_z = J_z \cdot \omega \quad (10.8)$$

gdzie:

ω = $\dot{\varphi}$ – wartość prędkości kątowej

J_z – moment bezwładności ciała względem osi Oz

Zasada krętu dla układu mechanicznego ma postać

$$\frac{d \bar{K}_0}{d t} = \bar{M}_0 \quad (10.9)$$

gdzie:

$$\bar{M}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{M}_{i0} (\bar{P}_i)$$

$$\frac{d K_x}{d t} = M_x, \quad \frac{d K_y}{d t} = M_y, \quad \frac{d K_z}{d t} = M_z$$

„Pochodna krętu względem czasu układu mechanicznego względem nieruchomego bieguna jest równa sumie geometrycznej momentów od sił zewnętrznych (czynnych i reakcji) względem tego bieguna”. Dla bryły obracającej się wokół nieruchomej osi Oz ostatni związek (10.9) przyjmuje postać

$$J_z \cdot \varepsilon = M_z \quad (10.10)$$

gdzie:

$$\varepsilon = \frac{d \omega}{d t} = \ddot{\varphi}$$

jeżeli $\bar{M}_0 = 0$, to $\bar{K}_0 = \text{const}$. Jeżeli $M_x = 0$, to $K_x = 0$ itd.

Zasada krętu jest słuszna także dla przypadku ruchu względnego punktów układu w stosunku do postępowego ruchu unoszenia układu sił o początku w środku masy

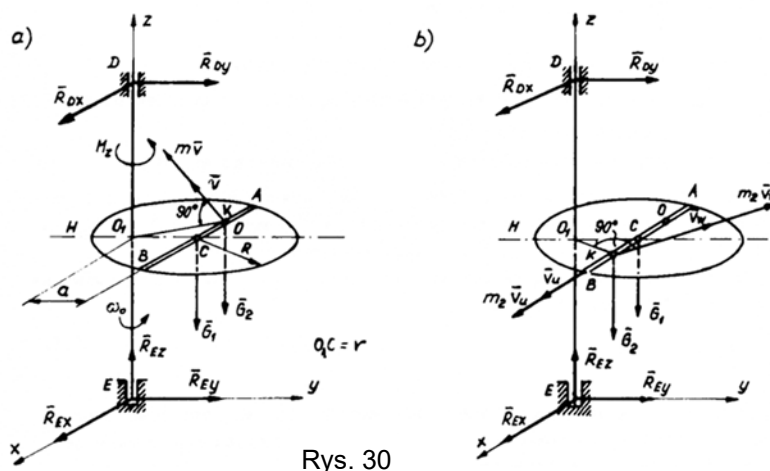
$$\frac{d \bar{K}_s}{d t} = \bar{M}_s \quad (10.11)$$

gdzie:

$$\bar{M}_s = \sum_{i=1}^n \bar{M}_{is} (\bar{P}_i)$$

Przykład

Ciało H o masie $m_1 = 200$ kg (rys.30) obraca się wokół osi Oz ze stałą prędkością kątową, której wartość wynosi $\omega_0 = -2s^{-1}$. W punkcie O rowka AB w odległości $AO = 0,8$ m od punktu A znajduje się punkt materialny K o masie $m_2 = 80$ kg. Od chwili $t = t_0 = 0$ na układ działa para sił, przy czym wartość momentu tej pary wynosi $M_z = 592$ t [Nm] Przy $t = t_1 = 4s$ działanie pary sił zanika, jednocześnie punkt K rozpoczyna się poruszać ruchem względnym od punktu O w kierunku B . Zgodnie z równaniem $OK = s_w = 0,5 (t - t_1)^2$ (m) dla $t > t_1$. Wyznaczyć ω_1 i ω_2 ciała przy $t = t_1$ oraz przy $t = t_2$, jeżeli $R = 2,4$ m, $r = 1,2$ m.



Rys. 30

Rozwiązanie

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z, \quad v = \omega \cdot O_1 O$$

$$m_2 v \cdot O_1 O = m_2 \omega (O_1 O)^2$$

a zatem

$$K_z = J_z \cdot \omega + m_2 (O_1 O)^2 = [J_z + m_2 (O_1 O)^2] \omega$$

Podstawiając to wyrażenie do pierwszego wzoru otrzymujemy

$$\frac{d[J_z + m_2 (O_1 O)^2] \omega}{dt} = 592 \text{ t}$$

Rozdzielając zmienne i całkując otrzymamy

$$\begin{aligned}
& [J_z + m_2 (0_1 0)^2] \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega = \int_0^{t_1} 592 t \cdot dt \\
& [J_z + m_2 (0_1 0)^2] (\omega_1 - \omega_0) = 296 t^2 \\
& J_z = J_s + m_1 r^2 = \frac{m_1 R^2}{2} + m_1 r^2 = \\
& = \frac{200 \cdot 2 \cdot 4^2}{2} + 200 \cdot 1,2^2 = 864 \text{ [kgm}^2\text{]}
\end{aligned}$$

Z rysunku 30a wynika, że

$$(0_1 0)^2 = (0 C)^2 + (0_1 C)^2 = 1,6^2 + 1,2^2 = 4 \text{ [m}^2\text{]}$$

dlatego

$$J_z + m_2 (0_1 0)^2 = 864 + 80 \cdot 4 = 1184 \text{ [kgm}^2\text{]}$$

a zatem

$$\begin{aligned}
1184 [\omega_1 - (-2)] &= 296 \cdot 4^2 \\
\omega_1 &= 2 \text{ [s}^{-1}\text{]}
\end{aligned}$$

W odstępie czasu od $t = t_1$ do $t = t_2$ na układ działają tylko siły \bar{G}_1 i \bar{G}_2 i reakcja więzów (rys. 30 b), a zatem

$$K_z = \text{const}, \quad \text{czyli} \quad K_{z1} = K_{z2}$$

Dla $t = t_1$,

$$K_{z1} = [J_z + m (0_1 0)^2] \omega_1 = 1184 \cdot 2 = 2368 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

Przy $t > t_1$, prędkość punktu K składa się z prędkości względnej \bar{v}_w i prędkości unoszenia \bar{v}_u . Dlatego dla $t = t_2$

$$\begin{aligned}
K_{z2} &= J_z + m_2 \omega_2 (0_1 K_2)^2 - m_2 v_w \cdot 0_1 C \\
(0_1 K_2)^2 &= (0_1 C)^2 + (C K_2)^2,
\end{aligned}$$

gdzie: $CK_2 = OK_2 - OC$

$$OK_2 = s_2 = 0,5 (t - t_2)^2 = 0,5 (6 - 4)^2 = 2 \text{ [m]}$$

$$v_w = \frac{ds}{dt} = 2 \cdot 0,5 (t - t_2)$$

Dla $t = t_2$,

$$v_w = 2 \cdot 0,5 (6 - 4) = 2 \text{ [m/s]}$$

$$K_{z2} = 864 \omega_2 + 80 \omega_2 \cdot 1,6 - 80 \cdot 2 \cdot 1,2 = 992 \omega_2 - 192$$

$$K_{z1} = K_{z2} \rightarrow 2368 = 992 \omega_2 - 192$$

ostatecznie $\omega_2 = 2 \cdot 59 \text{ [s}^{-1}\text{]}$

10.3 Energia, praca, moc.

Energię kinetyczną układu punktów materialnych można zapisać w postaci

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (10.12)$$

Jeżeli układ wykonuje ruch złożony, to

$$E = \frac{1}{2} M v_s^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{iw}^2 \quad (10.13)$$

gdzie: v_s – wartość prędkości środka masy w ruchu postępowym unoszenia lub dowolnego innego punktu,
 v_{iw} – wartość prędkości i-tego punktu w ruchu względnym wokół środka masy,
 m_i – masa i-tego punktu,
 M – całkowita masa układu.

Energia kinetyczna bryły w ruchu postępowym wyraża się wzorem (10.14), zaś w obrotowym (10.15)

$$E = \frac{1}{2} M v_s^2 \quad (10.14)$$

$$E = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \quad (10.15)$$

gdzie: J_z – moment bezwładności ciała względem osi obrotu
 ω – wartość prędkości kątowej

W ruchu płaskim energia kinetyczna bryły wyraża się wzorem

$$E = \frac{1}{2} M v_s^2 + \frac{1}{2} J_s \omega_s^2 \quad (10.16)$$

gdzie: J_s – moment bezwładności bryły względem osi przez środek masy i prostopadłej do płaszczyzny kierowniczej
 ω_s – wartość prędkości kątowej wokół prostej przechodzącej przez środek masy

Pracę siły na skończonym przesunięciu punktu materialnego można wyznaczyć ze wzoru

$$L = \int_{\overline{AB}} \overline{P} \cdot d\overline{r} = \int_{\overline{AB}} P_{\tau} ds = \int_{\overline{AB}} (P_x dx + P_y dy + P_z dz) \quad (10.17)$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} (P_x \dot{x} + P_y \dot{y} + P_z \dot{z}) dt \quad (10.18)$$

Pracę stałej siły na prostoliniowym przesunięciu drogi oblicza się ze wzoru (10.22), pracę siły ciężkości ze wzoru (10.23), pracę siły sprężystości ze wzoru (10.24)

$$L = P \cdot s \cdot \cos(\overline{P}, \overline{s}) \quad (10.19)$$

$$L = G(z_1 - z_2) \quad (10.20)$$

$$L = \frac{1}{2} k \cdot x^2 \quad (10.21)$$

gdzie: G – ciężar

z_1, z_2 – współrzędne środka masy w początkowym i końcowym położeniu

k – współczynnik sprężystości

x – wydłużenie sprężyny

Pracę i moc w ruchu obrotowym oblicza się ze wzoru

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi, \quad N = M_z \cdot \omega \quad (10.22)$$

M_z – suma algebraiczna momentów od sił czynnych i reakcji względem osi obrotów

φ_1, φ_2 – położenie początkowe i końcowe

Pracę elementarną δL sił przyłożonych do bryły w ruchu dowolnym i moc w tym ruchu wyraża się wzorem

$$\delta L = (\overline{W}_g \cdot \overline{V}_0 + \overline{M}_g \cdot \overline{\omega}) dt, \quad N = \overline{W}_g \cdot \overline{V}_0 + \overline{M}_g \cdot \overline{\omega} \quad (10.23)$$

Jeżeli siły działające na punkt mają potencjał, tzn. są spełnione warunki

$$\frac{\partial P_x}{\partial y} = \frac{\partial P_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_x}{\partial z} = \frac{\partial P_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_y}{\partial z} = \frac{\partial P_z}{\partial y} \quad (10.24)$$

To praca nie zależy od toru punktów, a pole sił jest tzw. polem potencjalnym. W tym przypadku

$$\delta L = -dV, \quad L = V_1 - V_2 \quad (10.25)$$

gdzie: V_1 i V_2 – wartość energii potencjalnej $V(x, y, z)$ w początkowym i końcowym położeniu

Energię potencjalną siły ciężkości i sprężyny oblicza się ze wzorów

$$V = Gz + \text{const} \quad V = \frac{1}{2} kx^2 \quad (10.26)$$

Zasadę równoważności energii kinetycznej i pracy można zapisać w postaci

$$E_2 - E_1 = L \quad (10.27)$$

„Przyrost energii kinetycznej w pewnym odstępie czasu jest równy sumie prac sił czynnych i reakcji w tym odstępie czasu”.

Zasada zachowania energii ma postać

$$E + V = \text{const} \quad (10.28)$$

„Suma energii kinetycznej i potencjalnej w polu potencjalnym jest wielkością stałą”.

Moc układu można obliczyć także ze wzoru

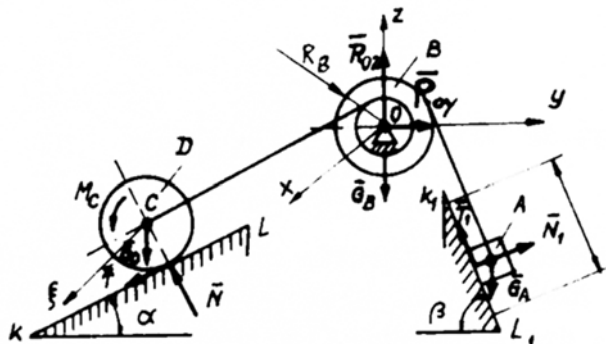
$$N = \frac{dE}{dt} \quad (10.29)$$

„Pochodna energii kinetycznej układu jest równa sumie mocy wszystkich sił działających na ten układ”.

Przykład

Układ mechaniczny pokazany jest na rys. 31 porusza się pod wpływem działania sił ciężkości w kierunku zaznaczonym strzałką.

Mając dane: $m_A = 3$, $m_B = \frac{1}{2}$ [m], $R_D = 30$ [cm], $R_B = 20$ [cm], $r_B = 15$ [cm], $\beta = 2\alpha = 60^\circ$, $\mu = 0,2$, $s = 6$ [m], promień bezwładności $i_B = 17$ [cm], ramię oporu toczenia $f = 0,25$ [cm] wyznaczyć wartość prędkości.



Rys. 31

Rozwiązanie

$$E_2 - E_1 = L$$

Ponieważ $E_1 = 0$, więc $E_2 = L$

Energia kinetyczna E_2 układu jest sumą energii kinetycznych ciał A, B, D

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} J_B \cdot \omega_B^2 + \frac{1}{2} m_D v_m^2 + \frac{1}{2} J_s \omega_s^2 \\ E_2 &= \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{6} m_A i_B^2 \cdot \omega_B^2 + m_A v_s^2 + \frac{1}{2} m_A R_D^2 \omega_s^2 \\ &= m_A \left(\frac{1}{2} v_A^2 + \frac{1}{6} i_B^2 \omega_B^2 + v_s^2 + \frac{1}{2} R_D^2 \omega_s^2 \right) \\ \omega_B &= \frac{v_A}{R_B}, \quad \frac{v_s}{v_A} = \frac{r_B}{R_B} \text{ skąd } v_s = \frac{r_B}{R_B} v_A \\ E_2 &= \frac{1}{2} m_A v_A^2 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{i_B^2}{R_B^2} + 3 \frac{r_B^2}{R_B^2} \right) = 2,93 \frac{m v_A^2}{2} \end{aligned}$$

Praca wszystkich sił działających na ciała D i A wynosi

$$L = -T \cdot s - G_A s \cdot \sin \alpha - M_s \cdot \varphi_D + G_A s \cdot \sin \beta$$

gdzie

$$T = \mu \cdot N = \mu \cdot G_A \cdot \cos \beta, \quad M_B = f \cdot N = f \cdot G_D \cos \alpha$$

$$L = -\mu \cdot G_A \cdot \cos \beta \cdot s - G_D \cdot s \cdot \sin \alpha -$$

$$-f \cdot G_D \cdot \cos \alpha \varphi_D + G_D \cdot s \cdot \sin \beta$$

Ponieważ

$$s_s = \frac{r_B}{R_B} \cdot s \quad \text{i} \quad \varphi_D = \frac{s_s}{R_D} = \frac{r_B}{R_B R_D} \cdot s$$

więc

$$\begin{aligned} L &= \left(-\mu \cdot G_A \cos \beta - G_D \frac{r_B}{R_B} \sin \alpha - f \cdot G_D \cdot \cos \alpha \frac{r_B}{R_B \cdot R_D} + G_A \sin \beta \right) \cdot s = \\ &= m_A \cdot g \cdot s \left(-\mu \cdot \cos \beta - 2 \frac{r_B}{R_B} \sin \alpha - 2 \cdot f \cdot \cos \alpha \frac{r_B}{R_B R_D} + \sin \beta \right) \end{aligned}$$

$$L = 0,004 m_A \cdot g \cdot s$$

$$E_2 = L \rightarrow 2,93 \frac{m_A v_A^2}{2} = 0,004 m_A \cdot g \cdot s$$

skąd

$$v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,004}{2,93} g \cdot s} = \sqrt{\frac{0,008}{2,93} 9,81 \cdot 6} = 0,4 \text{ m/s}$$

Zasada ruchu środka masy. Zasada pędu i popędu

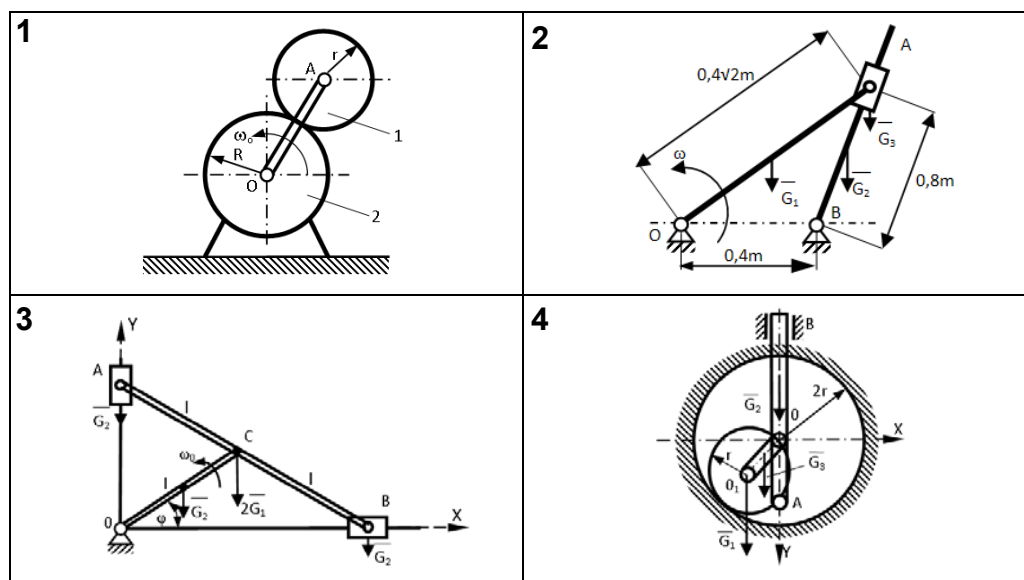
Dla układów mechanicznych przedstawionych na rysunkach 1 – 10, wyznaczyć:

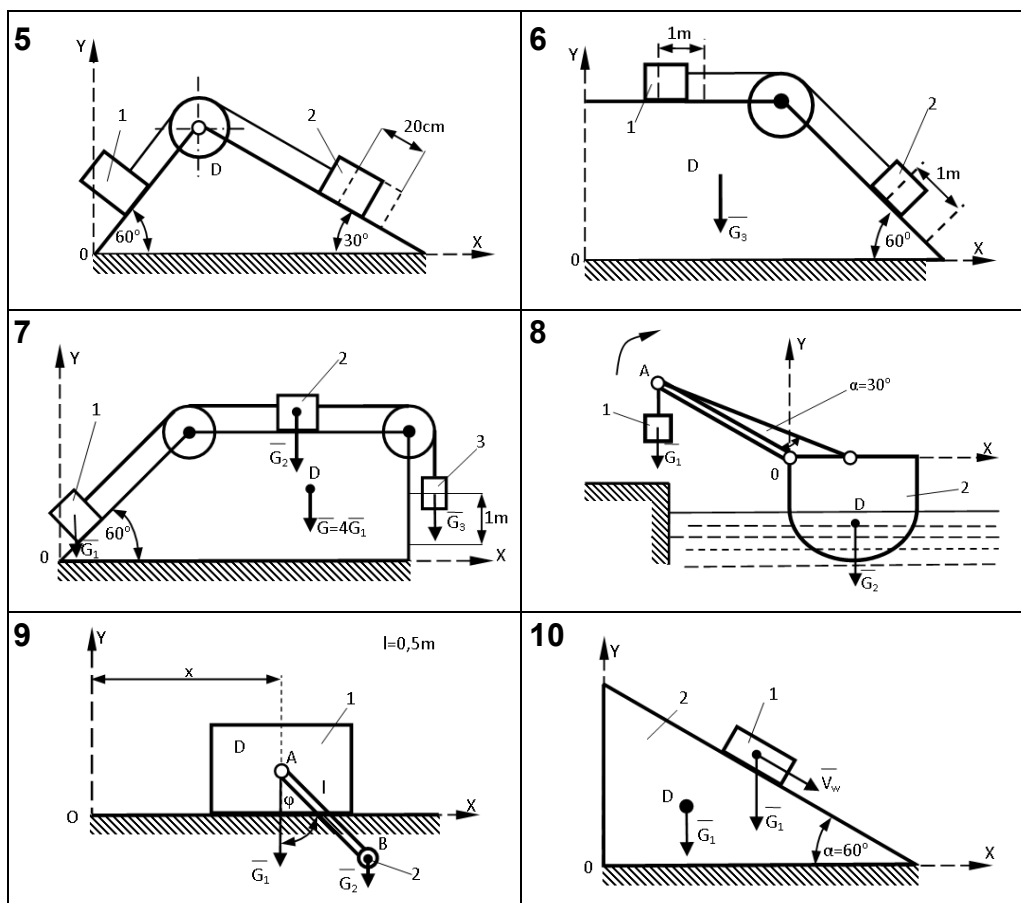
- Całkowity pęd \bar{p} układu, jeżeli $\omega_0 = \text{const}$ (warianty 1 – 4)
- Przesunięcie x ciała D, jeżeli ciało o ciężarze G_1 przebędzie drogę s (warianty 5 – 9)
- Prędkość ciała D (wariant 10)

Dane do obliczeń przedstawiono w tabeli

Uwaga: tarcie na powierzchni styku można pominąć

Nr rys.	Siła [N]			[s ⁻¹]	Dodatkowe dane	Szukane
	G ₁	G ₂	G ₃			
1	$2 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	-	$\omega_0 = \text{const}$	-	p
2	$3 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	$\omega_0 = \text{const}$	-	p
3	$4 \cdot 10^2$	$2 \cdot 10^2$	-	$\omega_0 = \text{const}$	$l = 50 \text{ cm}$	p
4	$6 \cdot 10^2$	$4 \cdot 10^2$	-	$\omega_0 = \text{const}$	$r = 20 \text{ cm}$	p
5	$4 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^3$	$16 \cdot 10^3$	-	-	x
6	$1 \cdot 10^2$	$0,6 \cdot 10^2$	$2 \cdot 10^2$	-	-	x
7	$2 \cdot 10^2$	$1,5 \cdot 10^2$	$1 \cdot 10^2$	-	-	x
8	$2 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^5$	-	-	obrót od 0 o 30°	x
9	$4 \cdot 10^2$	$1 \cdot 10^2$	-	-	dla $t = 0$, $\varphi = 30^\circ$	x
10	$0,5 \cdot 10^2$	$1 \cdot 10^2$	-	-	$v_w = 4 \text{ m/s}$	V _{GA}



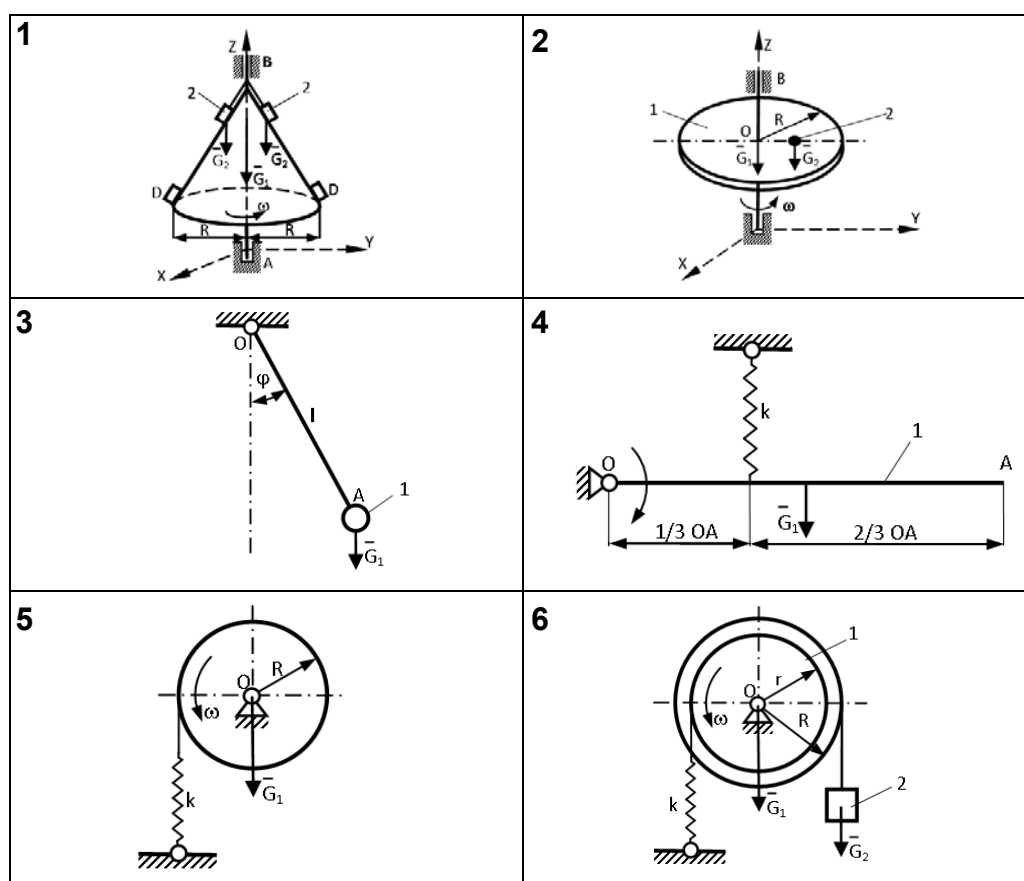


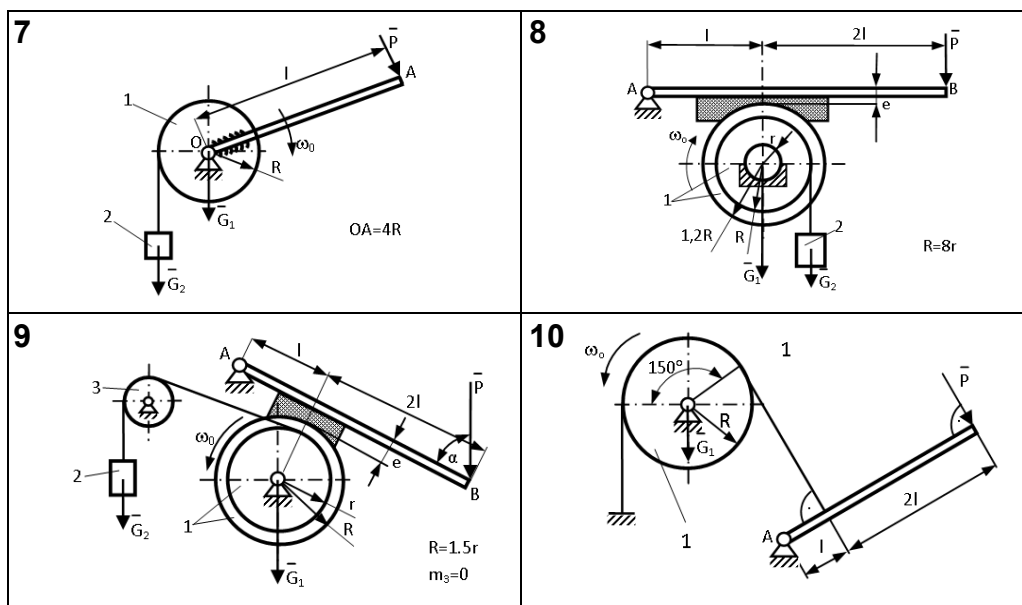
Kręt. Zasada krętu.

Ciało o masie m_1 obraca się ze stałą prędkością kątową (rys. 1 – 2, 7 – 10). Wyznaczyć prędkość kątową tego ciała, jeżeli ciało 2 zsuwa się do położenia D (wariant 1), jeżeli ciało 2 przemieszcza się po cie 2 z prędkością względną, której wartość wynosi $v_w = 2$ [m/s]. W wariantach (7 - 10) wyznaczyć czas hamowania, jeżeli $P = 200$ [N], oraz liczbę obrotów koła 1 do chwili zatrzymania się. W wariantach 3 – 6 znaleźć częstość i okres drgań własnych oraz równanie ruchu, jeżeli dla $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$.

Wyznaczyć prędkość kątową ciała 1 przy $t = t_1 = 3$ [s] oraz $t = t_2 = 6$ [s]. Dane do obliczeń zestawiono w poniższej tabeli.

Nr rys.	Masa [kg]		[s ⁻¹]	Wymiar [m]				Moment [Nm]	Droga [m]	Dodatkowe dane
	m ₁	m ₂		A	b	R	A0			
1	800	200	36	-	-	0,4	-	-	-	-
2	100	25	9	-	-	0,4	0,2	-	-	-
3	100	-	-	-	-	-	1,0	-	-	27 [J/m]
4	400	-	-	-	-	-	1,5	-	-	20
5	200	-	-	-	-	0,2	-	-	-	40
6	600	200	-	-	-	0,4	-	-	-	-
7	600	200	10	-	-	-	1,2	-	-	l = 0,4 [m] R = 0,1 [m]
8	800	400	30	-	-	0,4	-	-	-	e = 0,4 l
9	800	400	30	-	-	0,45	-	-	-	e = 0,4 l
10	800	-	30	-	-	0,5	-	-	-	-





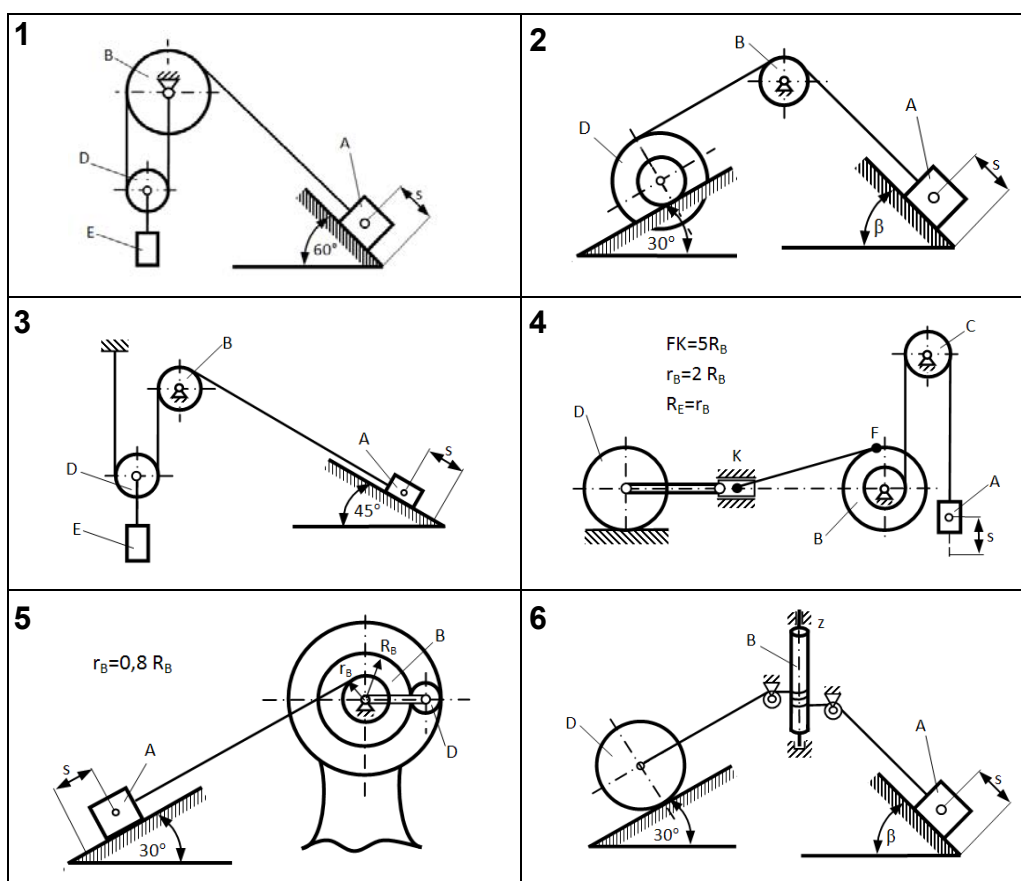
Zasada równowagi energii kinetycznej i pracy. Zasada zachowania energii

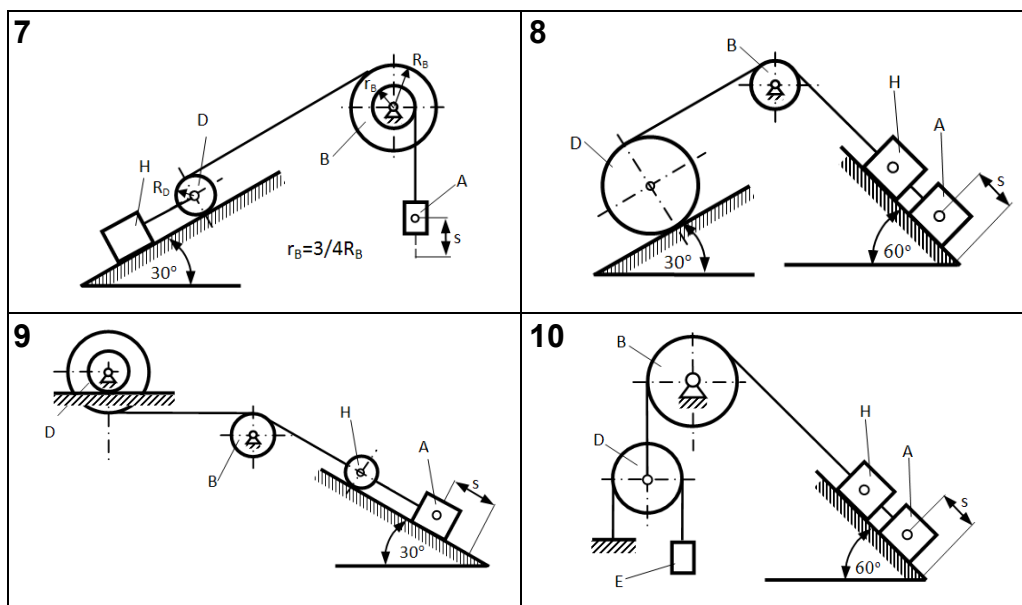
Układ mechaniczny pozostający w spoczynku, składający się z kilku ciał, pod działaniem sił ciężkości zostaje wprowadzony w ruch. Uwzględniając tarcie ślizgowe ciała A i H (warianty 1 – 3, 5 – 10, i opór toczenia ciała D i H toczącego się bez poślizgu (warianty 2, 4, 6 – 9,) (rys. 1 – 10, , pomijając inne opory ruchu i masy lin, które przyjąć należy za nierozciągliwe, wyznaczyć prędkości i przyspieszenia ciała A w chwili, kiedy opuszczając się przebędzie ono drogę s . Znaleźć także moc sił działających na ciało A.

Uwaga: w zadaniach przyjęto następujące oznaczenia: m_A, m_B, m_D, m_E, m_H – masy ciał A, B, D, E, H, R_B, r_B, R_D, r_D – promienie kół dużych i małych, i_{Bx}, i_{Dx} – promienie bezwładności ciał B i D względem poziomych osi przechodzących przez środki mas, α, β – kąty pochylenia równi, μ – współczynnik tarcia ślizgowego ciała A, f – ramię oporu toczenia ciała D.

Dane do obliczeń zestawiono w tabeli.

Nr rys	[kg]					[cm]				μ	[cm]	[m]
	m_A	m_B	m_D	m_E	m_H	R_B	R_D	i_{Bx}	i_{Dx}		f	s
1	m	4 m	7/5 m	4/3 m	-	-	-	-	-	0,10	-	2
2	m	1/2 m	1/3 m	-	-	-	30	-	20	0,22	0,20	2
3	m	m	1/10 m	m	-	-	-	-	-	0,10	-	2
4	m	2 m	40 m	m	-	20	40	18	-	-	0,30	0,1
5	m	2 m	m	-	-	20	15	18	-	0,12	-	0,28
6	2 m	3 m	m	-	-	-	28	-	-	0,10	0,28	1,5
7	3 m	2 m	4 m	-	m	16	25	14	-	-	0,20	2
8	2 m	1/2 m	1/3 m	-	m	-	30	-	-	0,15	0,20	1,75
9	2 m	2 m	9 m	-	m	-	30	-	20	0,12	0,25	1,5
10	2 m	1/4 m	1/4 m	1/5 m	m	-	-	-	-	0,10	-	3





Odpowiedzi

Zasada ruchu środka masy. Zasada pędu i popędu

$$\text{Ad 1)} p = \frac{r \omega_0}{g} (2 G_1 + G_2), \quad \bar{p} \perp OA$$

$$\text{Ad 2)} p = \frac{0,4 \omega_0}{g} \sqrt{G_3^2 + 2 (0,5 G_1 + G_2)^2 + 2 G_3 (0,5 G_1 + G_2)}$$

$$\text{Ad 3)} p = \frac{\omega_0 l}{2 g} (5 G_1 + 4 G_2)$$

$$\text{Ad 4)} p_x = - \frac{r \omega_0 \cos \omega_0 t}{2 g} G_1, \quad p_y = - \frac{r \omega_0 \cos \omega_0 t}{2 g} (G_1 + 4 G_2)$$

$$\text{Ad 5)} x = - 3,77 \text{ [cm]} \quad - \text{w lewo}$$

$$\text{Ad 6)} x = - \frac{11}{36} \text{ [m]} \quad - \text{w lewo}$$

$$\text{Ad 7)} x = - 14 \text{ [cm]} \quad - \text{w lewo}$$

$$\text{Ad 8)} x = - 0,36 \text{ [m]} \quad - \text{w lewo}$$

$$\text{Ad 9)} x = \frac{G_2 l (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)}{G_1 + G_2}$$

$$\text{Ad 10)} v_D = - \frac{G_1}{G_1 + G_2} v_W \cos \alpha$$

Kręt. Zasada krętu

$$\text{Ad 1)} \quad \omega_D = \frac{\omega (2 m_2 r^2 + 0,3 m_1 R^2)}{R^2 (2 m_2 + 0,3 m_1)} = 14,9 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

$$\text{Ad 2)} \quad \omega_2 = \frac{\omega_1 m_1 R^2}{2 [m_2 (0,2)^2 + 0,5 m_1 R^2]} = 8 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

$$\text{Ad 3)} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = 3,13 \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2 \text{ [s]}, \quad \text{tg } \gamma = \frac{\omega_0 \varphi_0}{\varphi_0},$$

$$A = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\varphi_0^2 \omega_0^2 + \varphi_0^2}, \quad \varphi = A \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

$$\text{Ad 4)} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{3 m_1}} = 0,15 \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 41,87 \text{ [s]}, \quad \text{tg } \gamma = \frac{\omega_0 \varphi_0}{\varphi_0},$$

$$A = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\varphi_0^2 \omega_0^2 + \varphi_0^2}, \quad \varphi = A \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

$$\text{Ad 5)} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m_1}} = 0,447 \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 14,05 \text{ [s]}, \quad \text{tg } \gamma = \frac{\omega_0 \varphi_0}{\varphi_0},$$

$$A = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\varphi_0^2 \omega_0^2 + \varphi_0^2}, \quad \varphi = A \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

$$\text{Ad 6)} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k r^2}{m_1 \rho^2 + m_2 R^2}} = 0,136 \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 46,18 \text{ [s]},$$

$$\text{tg } \gamma = \frac{\omega_0 \varphi_0}{\varphi_0},$$

$$A = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\varphi_0^2 \omega_0^2 + \varphi_0^2}, \quad \varphi = A \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

$$\text{Ad 7)} \quad t_h = \frac{\omega_0 R^2 (0,5 m_1 + m_2)}{P l^2 - G_2 R^2} = 29,76 \text{ [s]}, \quad n = \frac{\omega_0 t_h}{4\pi} = 23,7 \text{ obrotów}$$

$$\text{Ad 8)} \quad t_h = \frac{\omega_0 (m_1 \rho^2 + m_2 R^2)}{G_2 R - M_C - 1,2 \mu P R} = 47,24 \text{ [s]}, \quad n = \frac{\omega_0 t_h}{4\pi} = 112,8 \text{ obrotów},$$

$$M_C = r \mu_c R_0 = r \mu \sqrt{4 \mu^2 p^2 + (G_1 + G_2 + 2p)^2}$$

$$\text{Ad 9)} \quad t_h = \frac{\omega_0 (m_1 \rho^2 + m_2 r^2)}{T R - G_2 \cdot r} = 6,85 \text{ [s]}, \quad n = \frac{\omega_0 t_h}{4\pi} = 16,36 \text{ obrotów}$$

$$\text{Ad 10)} \quad t_h = \frac{\omega_0 m_1 R}{G P (1 - e^{\mu\alpha})} = 18,38 \text{ [s]}, \quad n = \frac{\omega_0 t_h}{4} = 43,9 \text{ obrotów}$$

Zasada równowartości energii kinetycznej i pracy. Zasada zachowania energii

Ad 1)	$v_A = 2,43 \text{ [m/s]}$	$a_A = 1,50 \text{ [m/s}^2\text{]}$
Ad 2)	$v_A = 4,10 \text{ [m/s]}$	$a_A = 4,18 \text{ [m/s}^2\text{]}$
Ad 3)	$v_A = 4,35 \text{ [m/s]}$	$a_A = 4,75 \text{ [m/s}^2\text{]}$
Ad 4)	$v_A = 0,12 \text{ [m/s]}$	$a_A = 0,065 \text{ [m/s}^2\text{]}$
Ad 5)	$v_A = 0,62 \text{ [m/s]}$	$a_A = - 53,30 \text{ [m/s}^2\text{]}$
Ad 6)	$v_A = 3,60 \text{ [m/s]}$	$a_A = 4,20 \text{ [m/s}^2\text{]}$
Ad 7)	$v_A = 3,20 \text{ [m/s]}$	$a_A = 10,14 \text{ [m/s}^2\text{]}$
Ad 8)	$v_A = 1,44 \text{ [m/s]}$	$a_A = 0,60 \text{ [m/s}^2\text{]}$
Ad 9)	$v_A = 0,18 \text{ [m/s]}$	$a_A = 0,01 \text{ [m/s}^2\text{]}$
Ad 10)	$v_A = 1,60 \text{ [m/s]}$	$a_A = 0,42 \text{ [m/s}^2\text{]}$