

6. RUCH POSTĘPOWY BRYŁY I RUCH WZGLĘDNY PUNKTU

a. Równanie ruchu obrotowego bryły wokół nieruchomej osi

Wartość prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego wyznacza się ze wzorów

$$\Phi = \varphi(t), \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (6.1)$$

Przy obrocie bryły w jednym kierunku drogę kątową w odstępie czasu $t - t_0$ wyznacza się ze wzoru

$$\varphi^* = |\varphi - \varphi_0| \quad (6.2)$$

gdzie: φ^* , φ_0 – wartość współrzędnych kątowych w chwili t i t_0

Kąt φ^* obrotu ciała związany jest z ilością obrotów N bryły następująco

$$\varphi^* = 2\pi N \quad (6.3)$$

Związek między ω [s^{-1}] a prędkością obrotową n [obr/min]:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}$$

Przy ruchu jednostajnym bryły $\omega = \text{const}$, $\varepsilon = 0$, wówczas równanie ruchu obrotowego bryły ma postać

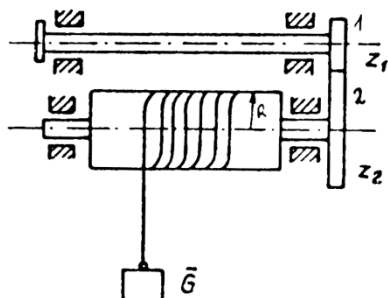
$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \quad (6.4)$$

Przy ruchu jednostajnie zmiennym $\varepsilon = \text{const}$, w tym przypadku

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \varepsilon t \\ \varphi &= \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Przykład 13

Dana jest przekładnia zębata (rys. 14, str. 69). Mając dane: liczby zębów kół z_1 i z_2 oraz promień R bębna, na który nawija się linka z zamocowanym do jej końca ciężarem, wyznaczyć równanie ruchu, prędkości i przyspieszenia ciężaru, jeżeli droga kąтова koła pędnego I ma postać: $\varphi_1 = 2 \pi t^2$



Rys. 14

Rozwiązanie

Droga s_1 koła I jest równa $s_1 = \varphi_1 \cdot r_1 = \varphi_2 \cdot r_2$, skąd

$$\varphi_2 = \varphi_1 \cdot \frac{r_1}{r_2} = \varphi_1 \cdot \frac{z_1}{z_2} = 2 \pi t^2 \cdot \frac{z_1}{z_2}$$

Droga jaką przebędzie ciężar G , wynosi

$$s_2 = R \cdot \varphi_2 = 2 \pi R t^2 \cdot \frac{z_1}{z_2}$$

Wartości prędkości i przyspieszenia ciężaru wynoszą

$$v_2 = \dot{s}_2 = 4 \pi R t \cdot \frac{z_1}{z_2}$$

$$a_2 = \ddot{s}_2 = 4 \pi R \cdot \frac{z_1}{z_2}$$

b. Prędkość bezwzględna \bar{v}_b punktu w ruchu względnym jest równa sumie geometrycznej prędkości unoszenia \bar{v}_u i prędkości względnej \bar{v}_w

$$\bar{v}_b = \bar{v}_u + \bar{v}_w$$

Związki między rzutami ww. prędkości wyraża się wzorami

$$v_{bx} = v_{ux} + v_{wx}, \quad v_{by} = v_{uy} + v_{wy}, \quad v_{bz} = v_{uz} + v_{wz}$$

$$v_b = \sqrt{v_{bx}^2 + v_{by}^2 + v_{bz}^2} \quad (6.7)$$

$$\cos(\bar{v}_b, \bar{i}) = \frac{v_{bx}}{|\bar{v}_b|}, \quad \cos(\bar{v}_b, \bar{j}) = \frac{v_{by}}{|\bar{v}_b|}, \quad \cos(\bar{v}_b, \bar{k}) = \frac{v_{bz}}{|\bar{v}_b|}$$

c. Przyspieszenie bezwzględne \bar{a}_b punktu w ruchu względnym przy postępowym ruchu unoszenia jest równa sumie geometrycznej przyspieszenia, unoszenia \bar{a}_u i względnego \bar{a}_w , przy obrotowym ruchu unoszenia: sumie geometrycznej przyspieszenia unoszenia \bar{a}_u , względnego \bar{a}_w i przyspieszenia Coriolisa \bar{a}_c

$$\bar{a}_b = \bar{a}_n + \bar{a}_w \quad (6.8)$$

$$\bar{a}_b = \bar{a}_u = \bar{a}_w + \bar{a}_c \quad (6.9)$$

gdzie:

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_u \times \bar{v}_w \quad (6.10)$$

ω_u – prędkość kątowna unoszenia

Wartość przyspieszenia Coriolisa wyznacza się ze wzoru

$$\dot{a}_c = 2\omega_u v_w \sin(\bar{\omega}_u, \bar{v}_w)$$

Jeżeli ruch względny i unoszenia są ruchami obrotowymi, wówczas przyspieszenie bezwzględne \bar{a}_b jest równe sumie geometrycznej przyspieszenia normalnego i stycznego unoszenia oraz względnego i przyspieszenia Coriolisa

$$\bar{a}_b = \bar{a}_u^n + \bar{a}_u^\tau + \bar{a}_w^n + \bar{a}_w^\tau + \bar{a}_c \quad (6.11)$$

Rzuty przyspieszenia a_b , jego wartość i kierunek obliczamy ze wzorów

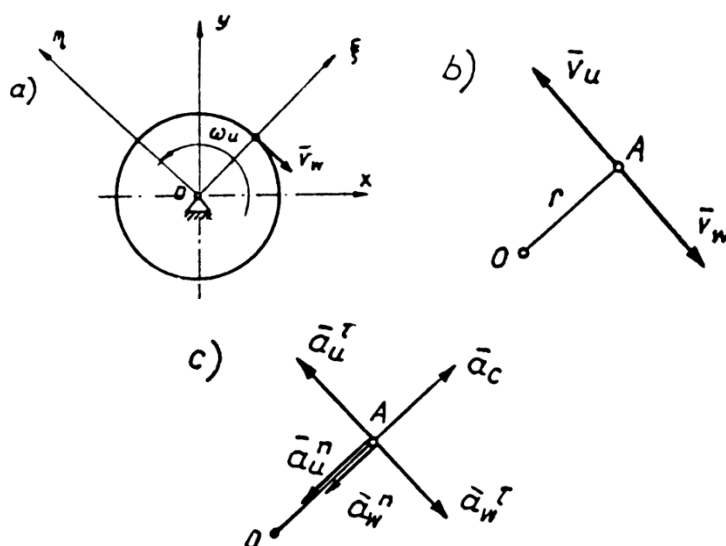
$$\begin{aligned} a_{bx} &= a_{ux}^u + a_{ux}^\tau + a_{wx}^n + a_{wx}^\tau + a_{cx} \\ a_{by} &= a_{uy}^u + a_{uy}^\tau + a_{wy}^n + a_{wy}^\tau + a_{cy} \\ a_{bz} &= a_{uz}^u + a_{uz}^\tau + a_{wz}^n + a_{wz}^\tau + a_{cz} \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$a = \sqrt{a_{bx}^2 + a_{by}^2 + a_{bz}^2}$$

$$\cos(\bar{a}_b, \bar{i}) = \frac{a_{bx}}{|\bar{a}_b|}, \quad \cos(\bar{a}_b, \bar{j}) = \frac{a_{by}}{|\bar{a}_b|}, \quad \cos(\bar{a}_b, \bar{k}) = \frac{a_{bz}}{|\bar{a}_b|}$$

Przykład 14

Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie punktu A poruszającego się z prędkością względną $V_w = 2 \text{ t}$ [m/s] po obwodzie obracającej się tarczy o promieniu r z prędkością kątową unoszenia: $\omega_u = 2 \text{ t}$ (rys.15. str.69)



Rozwiązanie:

$$\vec{v}_b = \vec{v}_u + \vec{v}_w$$

$$v_u = \omega_u \cdot r = 2 \text{ t}, \quad v_w = 2 \text{ t}$$

$$v_b = v_u - v_w = 2 \text{ t} (r - 1)$$

$$\vec{a}_b = \vec{a}_u^n + \vec{a}_u^r + \vec{a}_w^n + \vec{a}_w^r + \vec{a}_c$$

$$a_u^n = \omega_u^2 \cdot r = 4 \text{ t}^2, \quad a_w^n = \frac{v_w^2}{r} = \frac{4}{r} \text{ t}^2$$

$$a_u^r = \frac{dv_u}{dt} = 2, \quad a_w^r = \frac{dv_w}{dt} = 2 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$a_c = 2 \omega_u v_w \sin 90^\circ = 8 \text{ t}^2$$

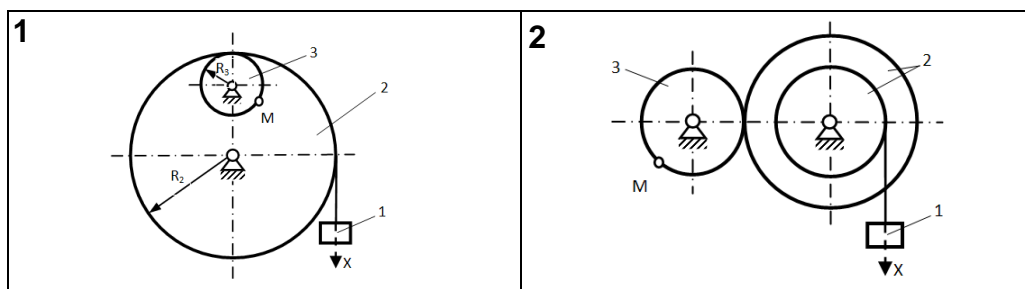
$$a_b = \sqrt{(a_u^n + a_w^n - a_c)^2 + (a_u^r - a_w^r)^2}$$

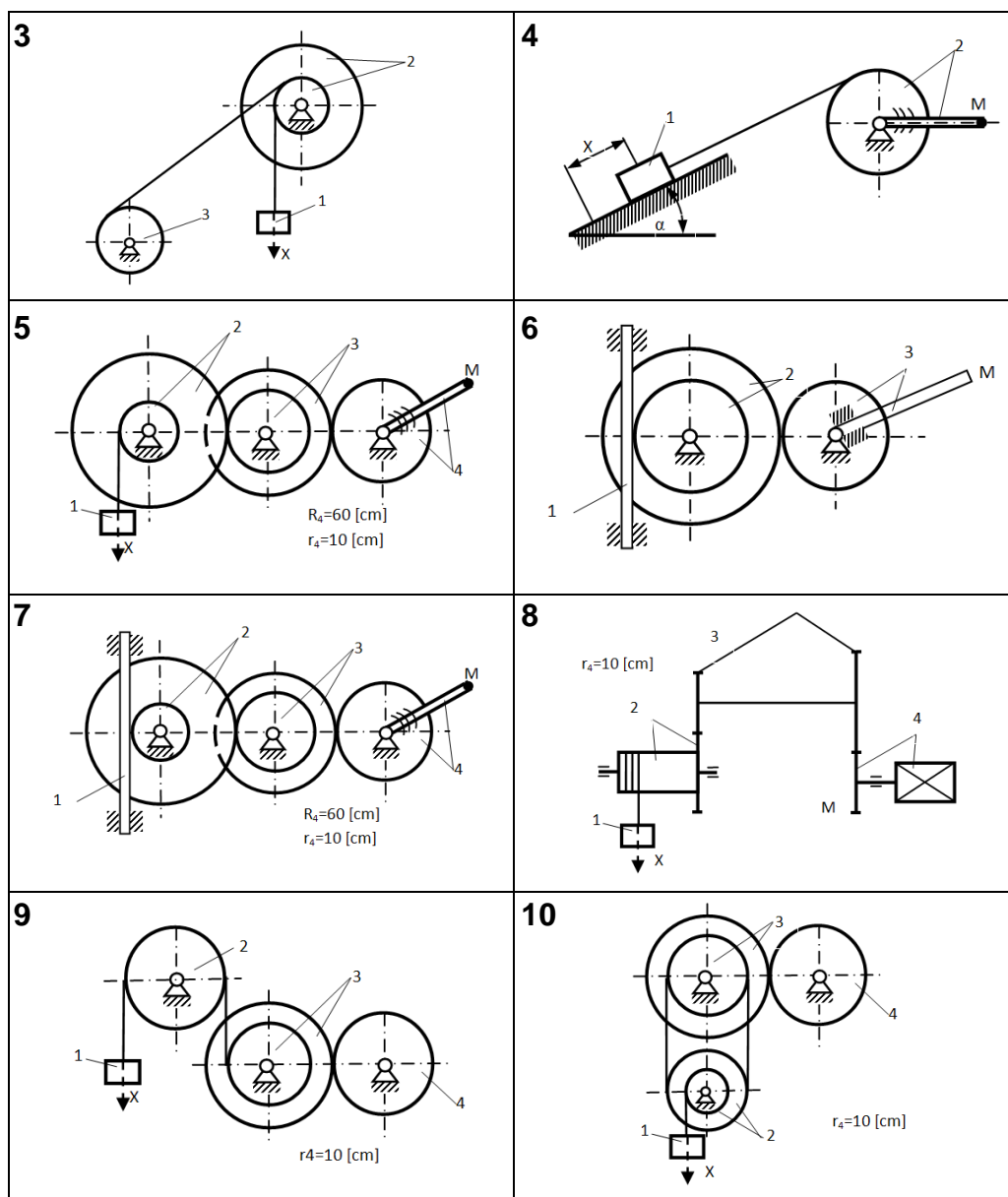
Wektory prędkości i przyspieszeń pokazano na rys. 15

6.1. Ruch postępowy i obrotowy brył

Mając dane równanie ruchu obrotowego bryły 3 (rys. 1 – 10, str.72) wyznaczyć równanie ruchu postępowego bryły 1 oraz jej prędkość, przyspieszenie i przebytą drogę w chwili gdy bryła 3 wykona drogę kątową φ . Znając równanie ruchu postępowego prostoliniowego bryły 1 (rys. 11 – 20, str. 73) wyznaczyć prędkość, przyspieszenie styczne, normalne i całkowite punktu M. Schematy mechanizmów pokazano na rysunkach 1 – 20. Dane do obliczeń zestawiono w tabeli.

Nr rysunku	Promień [cm]				Równanie ruchu		s (cm)	φ [rd]
	R_2	r_2	R_3	r_3	$x_2 = x_2(t)$ [cm]	$\varphi_3 = \varphi_3(t)$ [rd]		
1	45	-	15	-	-	$40 t^2$	-	40
2	100	60	75	-	-	$20 + 60 t^2$	-	140
3	60	20	30	-	-	$5 + 15 t^2$	-	50
4	60	10	-	-	-	$10 + 40 t^2$	-	90
5	50	10	40	20	-	$4 \cos 2\pi t$	-	4
6	60	10	40	15	-	$15 + 45 t^2$	-	150
7	80	20	30	50	-	$8 t^2$	-	4
8	30	10	10	40	-	$8 + 16 t^2$	-	10
9	10	-	60	20	-	$12 + 48 t^2$	-	24
10	10	15	30	20	-	$6 + 30 t^2$	-	96



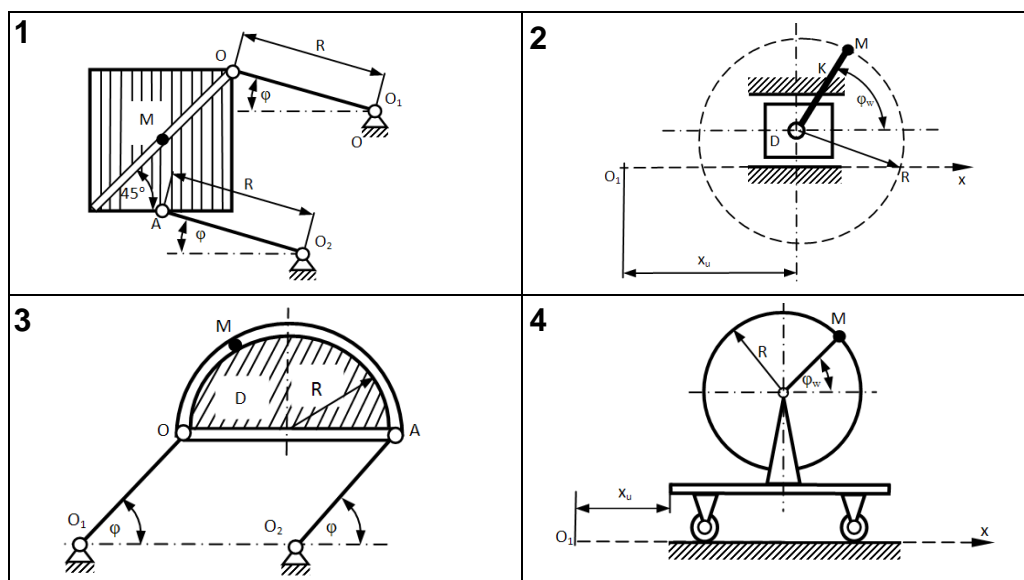


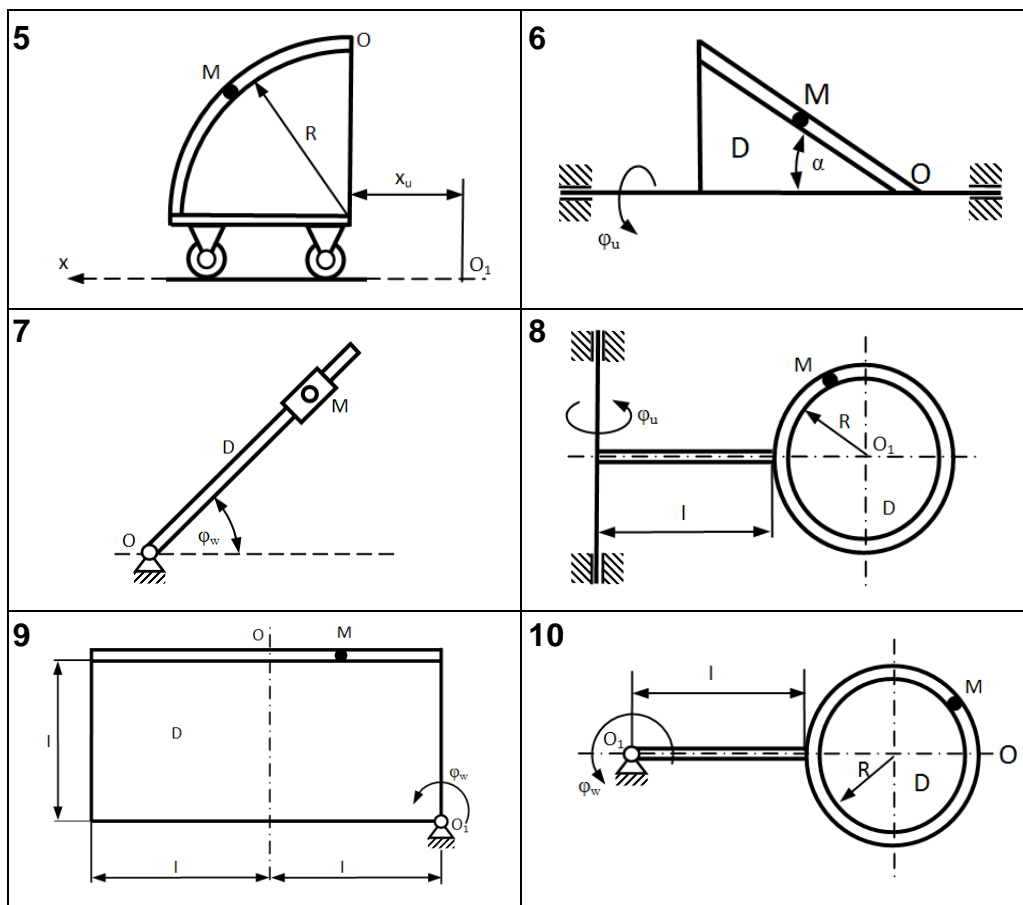
6.2. Ruch względny punktu

Mając dane równania ruchu względnego punktu M i unoszenia ciała D ruchem postępowym (rys.1 – 15, str.75, 76) oraz unoszenia ruchem obrotowym (rys. 6 – 20, str.75, 76) wyznaczyć dla chwili $t = t_1$

prędkość bezwzględną i przyspieszenie bezwzględne punktu M. Dane do obliczeń zestawiono w tabeli.

Nr rys.	Równanie ruchu unoszenia		Równanie ruchu względnego		t_1 [s]	R [cm]	Dodatkowe dane
	x_u [cm]	φ_u [rad]	Punktu M $OM = s_w$ [cm]	Ciała D φ_w [rad]			
1	-	$\frac{2}{3} \pi t^2$	$1,5 t + 10 t^3$	-	1/2	20	-
2	$10 + 3 \sin \frac{\pi}{2} t$	-	-	$0,24 \pi t^2$	5/3	30	-
3	-	$\frac{6}{5} \pi t^3$	$6 \pi t^2$	-	1	18	$O_1O = O_2A = 20 \text{ cm}$
4	$20 (1 + \sin \frac{\pi}{2} t)$	-	-	$0,36 \pi t^2$	5/6	50	-
5	$24 t^2 + 7 t$	-	$\frac{5}{3} \pi t^3$	-	2	40	-
6	-	$t^3 - 5 t$	$6 (t + 0,5 t^2)$	-	2	-	$\alpha = 30^\circ$
7	-	$4 t + 1,6 t^2$	$10 + 10 \sin 2 \pi t$	-	1/8	-	-
8	-	$1,2 t - t^2$	$20 \pi \cos \frac{\pi}{4} t$	-	4/3	20	$l = 20 \text{ cm}$
9	-	$2 t^2 - 0,5 t$	$25 \sin \frac{\pi}{3} t$	-	4	-	$l = 25 \text{ cm}$
10	-	$5 t - 4 t^2$	$\frac{15}{8} \pi t^3$	-	2	30	$l = 30 \text{ cm}$





6.3. Odpowiedzi

6.1. Ruch postępowy i obrotowy bryły

Ad 1) $x = 600 t^2$ $s^* = 600 \text{ [cm]}$ $v = 1200 \text{ [cm/s]}$
 $a = 1200 \text{ [cm/s}^2\text{]}$

Ad 2) $x = 900 + 2700 t^2$ $s^* = 6300 \text{ [cm]}$ $v = 90 \sqrt{2} \text{ [cm/s]}$
 $a = 90 \text{ [cm/s}^2\text{]}$

Ad 3) $x = 50 + 150 t^2$ $s^* = 452,5 \text{ [cm]}$ $v = 300 \sqrt{3} \text{ [cm/s]}$
 $a = 300 \text{ [cm/s}^2\text{]}$

Ad 4) $x = 100 + 400 t^2$ $s^* = 900 \text{ [cm]}$ $v = 800 \sqrt{2} \text{ [cm/s]}$

- $a = 8 \alpha \text{ [cm/s}^2\text{]}$
- Ad 5) $x = 16 \cos 2 \pi t$ $s^* = 16 \text{ [cm]}$ $v = 0 \text{ [cm/s]}$
 $a = -64 \pi^2 \text{ [cm/s}^2\text{]}$
- Ad 6) $x = 37,5 + 112,5 t^2$ $s^* = 375 \text{ [cm]}$ $v = 225 \sqrt{3} \text{ [cm/s}^2\text{]}$
 $a = 225 \text{ [cm/s}^2\text{]}$
- Ad 7) $x = 100 t^2$ $s^* = 50 \text{ [cm]}$ $v = 200 \sqrt{0,5} \text{ [cm/s}^2\text{]}$
 $a = 200 \text{ [cm/s}^2\text{]}$
- Ad 8) $x = 106,7 + 213,4 t^2$ $s^* = 133,3 \text{ [cm]}$ $v = 106,7 \sqrt{2} \text{ [cm/s}^2\text{]}$
 $a = 106,7 \text{ [cm/s}^2\text{]}$
- Ad 9) $x = 240 + 576 t^2$ $s^* = 528 \text{ [cm]}$ $v = 576 \text{ [cm/s}^2\text{]}$
 $a = 1152 \text{ [cm/s}^2\text{]}$
- Ad 10) $x = 80 + 400 t^2$ $s^* = 1280 \text{ [cm]}$ $v = 800 \sqrt{3} \text{ [cm/s}^2\text{]}$
 $a = 800 \text{ [cm/s}^2\text{]}$

Ad 6.2 Ruch względny punktu

- | | | |
|--------|---------------------------------------|-----------------------------------------|
| Ad 1) | $v_b = 38,3 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ | $a_b = 96,6 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ |
| Ad 2) | $v_b = 23,1 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ | $a_b = 193,3 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ |
| Ad 3) | $v_b = 233 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ | $a_b = 2584 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ |
| Ad 4) | $v_b = 21,6 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ | $a_b = 208,4 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ |
| Ad 5) | $v_b = 129,6 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ | $a_b = 245,1 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ |
| Ad 6) | $v_b = 8,6 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ | $a_b = 586 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ |
| Ad 7) | $v_b = 87,1 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ | $a_b = 753 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ |
| Ad 8) | $v_b = 72,3 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ | $a_b = 117,5 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ |
| Ad 9) | $v_b = 822,9 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ | $a_b = 12945 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ |
| Ad 10) | $v_b = 554,1 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ | $a_b = 8045,15 \text{ [cm/s}^2\text{]}$ |